



UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI
Facultatea de Fizică
ȘCOALA DOCTORALĂ DE FIZICĂ



Petru-Vlad TOMA

NOVEL ASPECTS OF THE INTERACTION OF ELECTRONS
WITH STRUCTURED LIGHT

REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT

Conducător științific
Prof. dr. Virgil BĂRAN

București, 2025

Cuprins

1	Introducere	5
1.1	Interacția modurilor LG cu sarcini libere	6
1.2	Împrăștierea neliniară Thomson	7
1.3	Cercetare pe plan local	8
2	Modurile Laguerre-Gauss	9
2.1	Formule Generale	9
2.2	Vizualizarea Câmpului	10
3	Ecuțiile de Mișcare Relativiste	15
3.1	Formule Generale	15
3.2	Compararea algoritmilor numerici de integrare a ecuațiilor de mișcare . . .	16
4	Transferul de Moment Cinetic de la Modurile LG către Electroni	21
4.1	Legi de scalare	21
4.2	Aproximații Analitice	22
4.3	Particule dincolo de focus	26
5	Împrăștierea Thomson a Modurilor LG	33
5.1	Aproximația undei plane locale	33
5.2	Rezultate Generale	34
5.3	Rezultate numerice	36
5.4	Aproximarea analitică a fazei	38
6	Concluzii	41
7	Bibliografie	43
8	Publicații Științifice și Conferințe	51
8.1	Lucrări publicate în reviste	51
8.1.1	Reviste cotate ISI	51
8.1.2	Reviste non-ISI	51
8.2	Lucrări prezentate la conferințe	51
8.2.1	Conferințe internaționale	51

Introducere

Încă de la popularizarea lor în 1992 de către Allen și colaboratorii săi [1], fasciculele Laguerre-Gauss (LG) au fost un tip de bază de lumină structurată cu aplicații în multe domenii, cum ar fi telecomunicațiile, pensetele optice, informația cuantică etc. [2–4], precum și în cercetarea fundamentală, cum ar fi împrăștierea fasciculelor elicoidale intense de pe ținte [5] și în plasmă [6]. În această teză în două părți, proprietățile fundamentale ale acestor fascicule sunt examinate, mai întâi prin analizarea dinamicii unui număr mare de sarcini individuale a căror dinamică este determinată de acestea, și apoi prin analizarea radiației emise de aceste sarcini.

Momentul cinetic \mathbf{J} este o mărime fizică care se conservă pentru sistemele invariante la rotații [7–9]. Uneori, această mărime poate fi separată în mod natural într-o componentă orbitală \mathbf{L} și o componentă de spin \mathbf{S} , așa cum este cazul planetelor care orbitează Soarele ($\propto \mathbf{L}$), care se rotesc și ele în jurul propriei axe ($\propto \mathbf{S}$) [8, 10]. Cu toate acestea, separarea celor două nu este întotdeauna posibilă. Pentru câmpul electromagnetic, separarea momentelor cinetice orbitale și de spin este o chestiune mult mai delicată.

În cea mai formală abordare, teorema lui Noether poate fi utilizată, pentru a deduce expresia momentului cinetic total \mathbf{J} a câmpului electromagnetic [8]. Această derivare separă în mod natural momentul cinetic total al câmpului în contribuții spațio-temporale și interne. Prin analogie cu alte cazuri, în care momentul cinetic total este separabil, aceste două contribuții sunt adesea numite momente cinetice „orbitale” și „de spin”. Astfel, momentul cinetic total al luminii ia forma,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\mathcal{D}}(\mathbf{r}_0, t) = & \underbrace{\epsilon_0 \int_{\mathcal{D}} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) dV}_{\mathbf{S}_{\mathcal{D}}(t)} \\ & + \underbrace{\epsilon_0 \int_{\mathcal{D}} \sum_i^{x,y,z} [E_i(\mathbf{r}, t) ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \nabla) A_i(\mathbf{r}, t)] dV}_{\mathbf{L}_{\mathcal{D}}(\mathbf{r}_0, t)} \end{aligned} \quad (1.1)$$

unde \mathbf{E} este câmpul electric, iar \mathbf{A} este potențialul vectorial.

Din păcate, așa cum a subliniat Barnett în [11], deși ecuațiile Maxwell libere sunt invariante la rotații, ceea ce în consecință generează $\mathbf{J}_{\mathcal{D}}(\mathbf{r}_0, t)$ conservat și invariant la transformări de etalonare, ele nu sunt invariante la transformările construite folosind generatorii spațiu-timporal sau interni, luați separat. Consecința acestor simetrii lipsă este că $\mathbf{S}_{\mathcal{D}}(t)$ și $\mathbf{L}_{\mathcal{D}}(\mathbf{r}_0, t)$ nu sunt nici invariante la etalonare, nici nu au garanția conservării independente [11–13].

În ciuda acestui fapt, dacă totuși ne propunem să construim un fascicul de lumină a cărui structură prezintă o aparență de moment cinetic orbital „bine definit”, trebuie să încercăm să forțăm câmpul electromagnetic în fascicule cu simetrie spațio-temporală față de generatoare pentru rotații de coordonate.

În special, dacă dorim să construim un fascicul care se propagă în direcția z , cu un moment cinetic orbital „bine definit” în aceeași direcție, atunci căutăm soluții pentru câmpul electromagnetic care să fie simultan vectorii proprii ai lui \hat{L}_z , operatorul momentului cinetic din mecanica cuantică pentru particule scalare,

$$-i\frac{\partial}{\partial\phi}u(\mathbf{r},t) = mu(\mathbf{r},t) \quad (1.2)$$

unde ϕ este azimutul în coordonate cilindrice.

O astfel de soluție *aproximativă* sunt fasciculele Laguerre-Gauss (LG). Ele pot fi găsite în aproximația *paraxială*, rezolvând ecuația Helmholtz în coordonate cilindrice. Modurile Laguerre-Gauss sunt un subset particular de fascicule circulare [14], care satisfac, în general, eq. (1.2) conținând dependența de azimut sub forma unei exponențiale complexe $e^{im\phi}$ și, în plus, formează și o bază ortogonală.

Astfel, în 1992, când Allen și colab. au analizat densitatea momentului cinetic în direcția de propagare a unui fascicul LG și au comparat-o cu densitatea de energie, au putut demonstra că aceasta este o constantă. Valoarea acestei constante este raportul dintre ordinul azimutal m (plus un termen legat de polarizare σ_z) și viteza unghiulară ω [1].

$$\frac{j_z(\mathbf{r},t)}{w(\mathbf{r},t)} = \frac{m + \sigma_z}{\omega} \quad (1.3)$$

Pe baza acestei euristici, Allen și colaboratorii săi au propus ipoteza conform căreia pentru fiecare foton cu energie cuantizată $\hbar\omega$, momentul cinetic total poate fi „separat” în „orbital” $\hbar m$ și „spin” $\hbar\sigma_z$. Astfel a fost lansată afirmația că modurile Laguerre-Gauss sunt o configurație a câmpului electromagnetic cu un moment cinetic orbital (în mod coincident) „bine definit” [1, 15].

1.1 Interacția modurilor LG cu sarcini libere

În memoria recentă, s-au depus eforturi concertate, atât teoretice, cât și de simulare, pentru a descifra această dinamică. O serie de lucrări au investigat traiectoriile electronilor în plasmă [16–22], utilizând simulări de tip particule-în-celulă (PIC) [23].

Într-o lucrare din 2018, Nuter și colab. descriu interacțiunea dintre un câmp „OAM” (eng. orbital angular momentum; de moment cinetic orbital, adică conținând dependență azimutală $e^{im\phi}$) polarizat radial și plasmă, folosind un cod de simulare PIC, unde au urmărit electroni individuali în scopul măsurării transferului de moment cinetic [19]. De asemenea, au reușit să construiască un model analitic, bazat pe rezultatele lor numerice, cu o bună concordanță [19].

Tot în 2018, Baumann și Pukhov au folosit, de asemenea, cadrul PIC pentru a investiga dinamica electronilor cu fascicule LG polarizate circular cu intensități relativiste. Ei au arătat că pentru $p = 0$, se formează fascicule de electroni care au fie forme toroidale, fie de fascicule elicoidale a căror chiralitate depinde de indicele efectiv $j = m + \sigma$ — suma ordinului azimutal și a coeficientului polarizării [20].

Pornind de la lucrarea lor anterioară, Nuter și colaboratorii săi arată cum un mod Laguerre-Gauss exact interacționează cu plasma folosind simulări 3D particule-în-celulă [21]. Ei au descoperit că polarizarea optimă pentru transferul „OAM” este cea radială și au dezvoltat o abordare perturbativă pentru a calcula „OAM” transferat de la fascicul

către electroni; cu toate acestea, în cazul polarizării liniare, nici măcar ordinul doi nu este suficient pentru a capta transferul „OAM” observat numeric [21].

În articolul său din 2020, Dondera a folosit atât ecuațiile exacte de mișcare, cât și potențialul ponderomotiv pentru a analiza dinamica particulelor individuale plasate atât în fascicule Laguerre-Gauss, cât și în fascicule Bessel [24]. În această lucrare, el s-a preocupat în principal de traiectoriile particulelor singulare și de captarea adesea observată la particulele încărcate care se află pe partea interioară a inelelor de intensitate [24]. De asemenea, el a arătat că câmpurile longitudinale joacă un rol important în obținerea dinamicii corecte, în cazul integrării ecuațiilor exacte ale mișcării [24].

Extinzând acest cadru de integrare a ecuațiilor exacte ale mișcării, Molnár și Stutman au analizat optimizarea accelerației și energiei particulelor încărcate în coliziune cu fascicule LG [25]. Aceștia s-au concentrat pe fascicule LG de ordin radial $p = 0$ și au reglat *talia fasciculului* și ordinul azimutal pentru transferul maxim de energie longitudinală [25]. Apoi, forța ponderomotoare a fost utilizată pentru a construi o justificare teoretică a rezultatelor [25].

Dmitiev și Korneev, pe lângă contribuțiile la o serie de lucrări ale lui Nuter pe această temă, au publicat și singuri o serie de contribuții, inclusiv o lucrare din 2022 în care discută modurile în care aproximarea paraaxială și anvelopa temporală afectează transferul OAM către particule și limitele sub care ar trebui luate în considerare corecțiile [26] și o lucrare din 2023 care prezintă un tratament al interacțiunii plasmă-laser în condiții de simetrie axială ruptă [27].

Un tratament perturbativ extins al dinamicii electronilor supuși unui fascicul LG a fost realizat de Dmitiev și Korneev în [22]. În această lucrare, cei doi au analizat impulsul liniar și impulsul cinetic al electronului până la ordinul patru perturbativ, pentru parametri mici ai fasciculului $a_0 \ll 1$, $\omega\tau^{-1} \ll 1$ și $\lambda\omega_0^{-1} \ll 1$. Aceștia au găsit o bună concordanță între teorie și simulările PIC, în special pentru energia câștigată de o particulă [22]. În plus, au găsit următoarele relații pentru termenii perturbativi ai momentului cinetic, $L_z^{(2)} \propto a_0^2$ și $\langle L_z^{(4)} \rangle_{\phi_0} \propto a_0^4$ [22], ceea ce pare a fi în concordanță cu o descoperire anterioară a autorului acestei teze și a colaboratorilor săi în [28]

1.2 Împrăștierea neliniară Thomson

Împrăștierea neliniară Thomson — interacțiunea câmpurilor electromagnetice intense cu electronii liberi - a fost studiată pe larg încă de la lucrările de pionierat ale lui Sarachik și Schappert [29], care au derivat traiectoria relativistă a electronilor într-o undă plană monocromatică. Deși majoritatea studiilor s-au concentrat pe energia radiată [30–35], câteva au abordat transferul momentului cinetic. Contribuțiile notabile includ analize ale radiației sincrotron [36], ale radiației provenite de la mișcarea circulară și spirală a electronilor [37] și, mai recent, conținutul de moment cinetic orbital („OAM”) al luminii împrăștiată [38, 39].

Generarea de fotoni purtători de „OAM” prin interacțiuni laser-electron a fost demonstrată experimental de Hemsing și colab. [40], în timp ce Taira și colab. [41] au prezis structuri de fază elicoidale în razele gamma produse prin împrăștiere inversă neliniară Thomson. Aceste descoperiri au motivat investigații asupra interacției materiei cu lumina structurată, incluzând atât modele de împrăștiere incoerente, în care contribuțiile particulelor sunt însumate independent [42, 43], cât și modele coerente, care iau în considerare efectele de interferență și sunt deosebit de relevante pentru studiile plasmă [44].

În acest context, examinăm împrăștierea neliniară coerentă Thomson a fasciculelor Laguerre-Gauss pe ansambluri de electroni. Prin tratarea foii de electroni ca o distribuție continuă, arătăm că interferența duce la radiații vortex cu o structură de fază mai bogată decât cea prezisă pentru împrăștierea particulelor individuale. Rezultatele noastre, care prezic caracteristicile observate experimental [40] și extind predicțiile teoretice [41], sugerează noi căi pentru generarea de fotoni helicoidali de înaltă energie [45–47].

1.3 Cercetare pe plan local

Pe scena internațională, multe laboratoare au acces la lasere de mare putere [48–50]. În timp ce, la nivel național, dispunem de ELI-NP și instalația Petawatt din CETAL, cu capacități de a produce impulsuri laser de mare intensitate [50, 51]. În istoria recentă, o serie de proiecte de cercetare au fost finanțate cu scopul de a investiga potențialul modulării impulsurilor laser în fascicule elicoidale, cum ar fi PMIHLB - „Frontiers Research in Photon-Matter Interaction Using Extreme Helical Light Beams” [52]. În cadrul și în jurul proiectului menționat, au fost publicate o serie de articole, inclusiv [53–59], care stabilesc utilizarea modurilor Laguerre-Gauss în domeniul experimental.

În concluzie, având în vedere interesul activ al comunității științifice, consider că există motive puternice pentru a le investiga în continuare. Obiectul acestei teze va fi, în prima parte, transferul momentului cinetic către particule cu sarcină la împrăștierea lor pe moduri intense LG. În timp ce, în a doua parte, vom analiza radiația emisă de particule după împrăștierea acestora modurile LG, sub forma împrăștierii neliniare coerente Thomson.

Modurile Laguerre-Gauss

2.1 Formule Generale

Câmpul electromagnetic liber, caracterizat prin doi vectori tridimensionali \mathbf{E} și \mathbf{B} , în fiecare punct din spațiu \mathbf{r} , la fiecare moment de timp t , trebuie să respecte ecuația undei pentru fiecare componentă. Modurile Laguerre-Gauss apar ca soluții monocromatice în aproximația paraxială ale ecuației undei. Proprietatea lor definitorie este profilul de fază cu dependență azimutală de tip $\exp(im\phi)$. Amintim că ecuația undei este

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.1)$$

Fără pierderea generalității, alegem ca direcție de propagare axa Oz ,

$$f(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}) \exp(i(\omega t - kz))$$

, iar aproximația paraxială presupune că orice schimbare de-a lungul axei de propagare se întâmplă mult mai lent față de lungimea de undă. Astfel, pentru o componentă a câmpului electromagnetic, ecuația undei se reduce la ecuația Helmholtz paraxială; scrisă în coordonate cilindrice, aceasta are forma

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (2.2)$$

unde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ și $\phi = \arctan \frac{y}{x}$.

În analogie cu mecanica cuantică, ecuația de mai sus admite o soluție fundamentală, sub forma modului Gaussian, dar și moduri superioare de lumină structurată. Astfel, găsim o familie de soluții ortogonale în planul transversal, dată de

$$\begin{aligned} u_{pm}(\rho, \phi, z) &= \frac{w_0}{w(z)} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)} \right)^{|m|} L_p^{|m|} \left(\frac{2\rho^2}{w^2(z)} \right) \\ &\times \exp \left(-\frac{\rho^2}{w^2(z)} - \frac{ik\rho^2}{2R(z)} - im\phi \right) \\ &\times \exp(i(2p + |m| + 1)\psi(z) + i\Phi_0) \end{aligned} \quad (2.3)$$

unde $m \in \mathbb{Z}$ este ordinul azimutal, iar $p \in \mathbb{N}$ este ordinul radial. În plus, am mai introdus și numărul de undă $k = 2\pi/\lambda$, distanța Rayleigh $z_R = \pi w_0^2/\lambda$, raza de curbură a fasciculului $R(z) = z + z_R^2/z$, faza Guoy $\psi(z) = \arctan(z/z_R)$ și talia fasciculului

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2}.$$

Avem libertatea să distribuim soluția scalară la cel mult două dintre cele 3 componente carteziane ale câmpului electric,

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{r}, t) &= \xi_x E_0 N_{pm} u_{pm}(\mathbf{r}) \exp(-ikz + i\omega t) \\ E_y(\mathbf{r}, t) &= \xi_y E_0 N_{pm} u_{pm}(\mathbf{r}) \exp(-ikz + i\omega t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

iar a treia este dată de legea lui Gauss, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Utilizând aproximația paraxială, a treia componentă devine,

$$E_z(\mathbf{r}, t) \approx -\frac{i}{k} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial E_y}{\partial y}(\mathbf{r}, t) \right). \quad (2.5)$$

ξ_x și ξ_y sunt doi parametri complecși care definesc polarizarea câmpului și îndeplinesc, $|\xi_x|^2 + |\xi_y|^2 = 1$, pentru a asigura că energia totală a fasciculului este invariantă la polarizare. N_{pm} este o constantă de normalizare ce asigură că fluxul de energie transportat printr-un plan transversal este determinat doar de amplitudine E_0 și de talia fasciculului w_0 .

Similar, din legea lui Faraday putem obține formulă exactă pentru câmpul magnetic $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{\omega} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

care în aproximația paraxială devine,

$$\begin{aligned} B_x(\mathbf{r}, t) &\approx -\frac{E_y(\mathbf{r}, t)}{c} \\ B_y(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{E_x(\mathbf{r}, t)}{c} \\ B_z(\mathbf{r}, t) &= \frac{i}{\omega} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial E_x}{\partial y}(\mathbf{r}, t) \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.2 Vizualizarea Câmpului

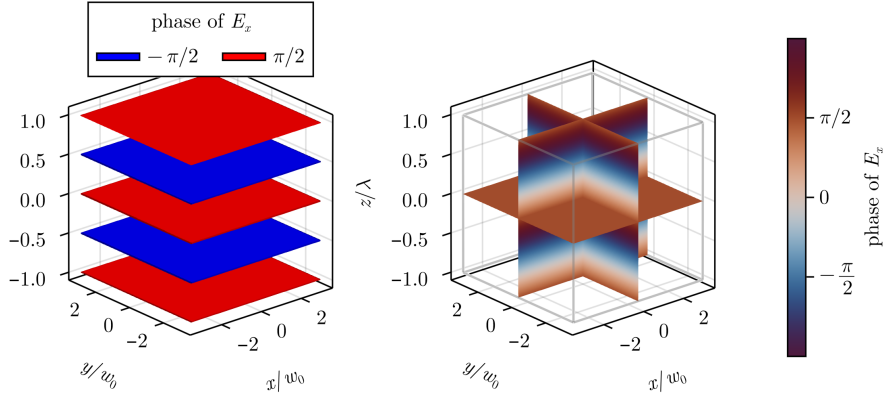
În fig. 2.1 este ilustrată faza componentei E_x a câmpului electric. Se poate observa cum atunci când câmpul este în modul fundamental $p = m = 0$, faza câmpului are aspectul așteptat de undă plană, izosuprafețele sunt plane paralele, hărțile de culoare sunt gradienti continui. În schimb, când $m \neq 0$ faza capătă un pol la $\rho = 0$, și schimbă semnul cu la trecerea prin zerourile polinomului asociat Laguerre.

În fig. 2.3 și fig. 2.2, am ilustrat în 3 moduri câmpului detaliat anterior, cu mențiunea că este multiplicat de anvelopa temporală gaussiană,

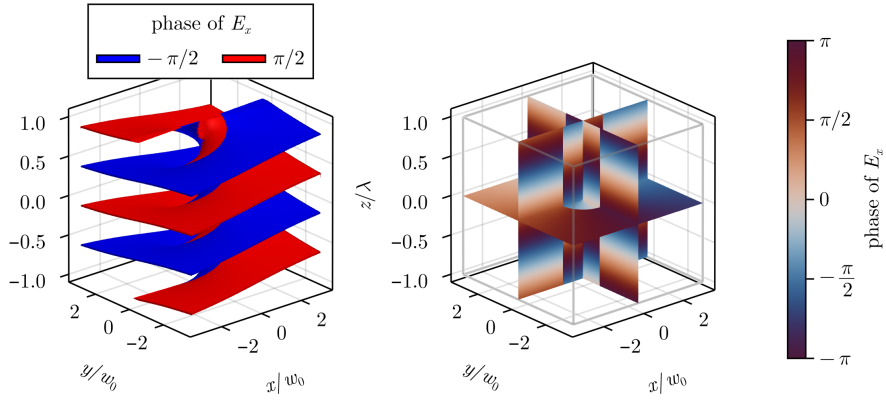
$$g(z, t) = \exp\left(-\frac{\left((t - t_0) - \frac{z - z_0}{c}\right)^2}{\tau_{\text{pulse}}^2}\right), \quad (2.7)$$

de care vom face uz în simulările cu particule, detaliate în capitolele următoare.

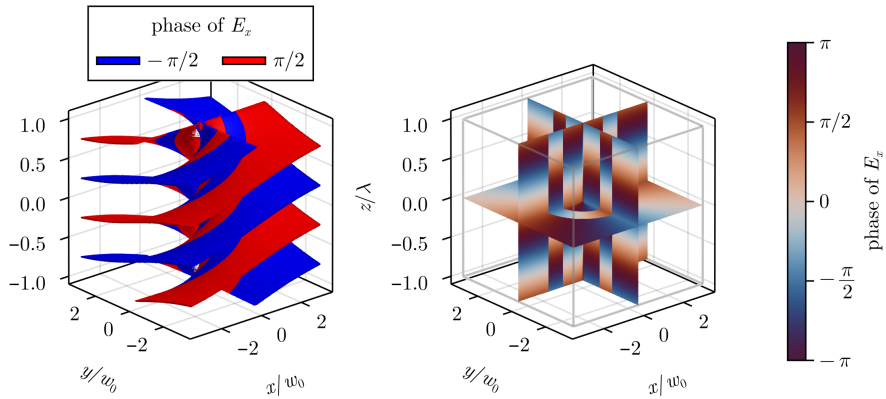
Observăm o diferență calitativă fundamentală între modurile liniar polarizate și modurile circular polarizate, cele din urmă având energia distribuită uniform în structuri cu simetrie circulară, în timp ce precedentele formează structuri helicoidale ale căror helicitate este dicatată de ordinul azimutal m .



(a) $p = 0, m = 0$

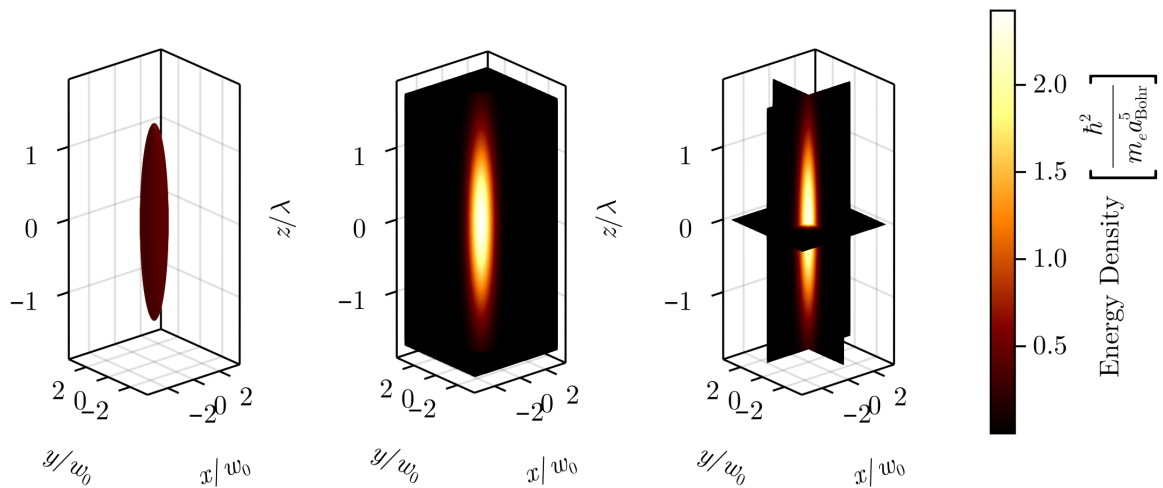


(b) $p = 1, m = -1$



(c) $p = 2, m = -2$

Figura 2.1: Faza complexă a lui E_x pentru diferite moduri LG. Panoul stâng al fiecărei figuri reprezintă o izosuprafață phase $(\mathbf{r}, t) = \pm\pi/2$, iar panoul drept conține trei hărți de culoare. Fasciculele sunt focalizate în planul xOy la $z = 0$.



(a) $p = 0, m = 0$

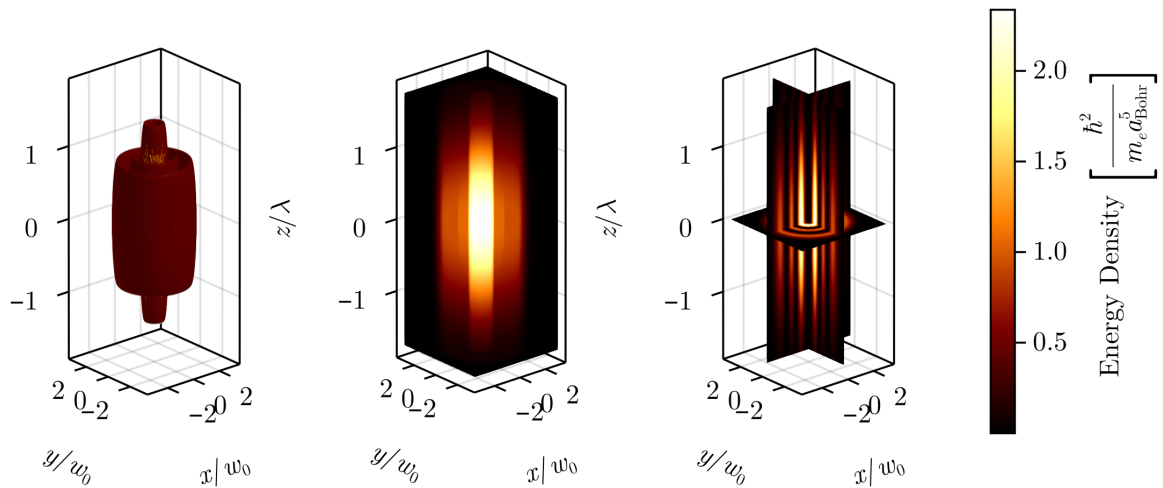
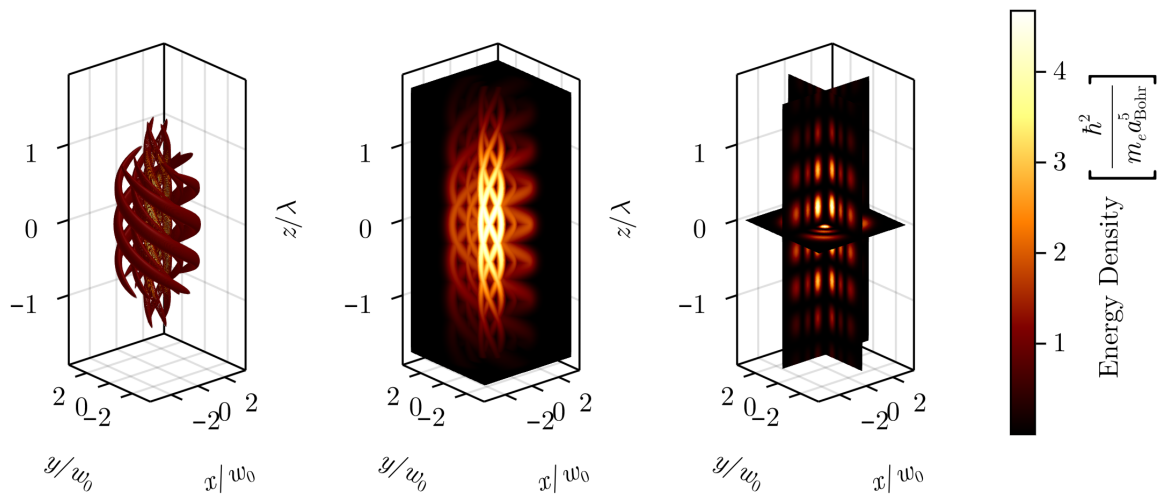
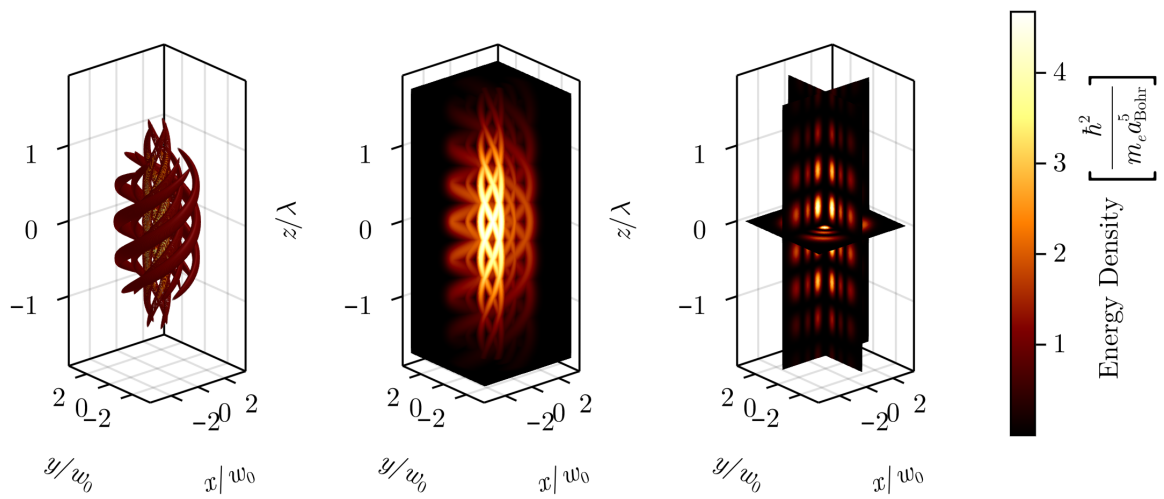


Figura 2.2: Densitatea de energie a modurilor LG polarizate circular de dreapta, înmulțite punctual cu (2.7) cu parametrii $\tau_{\text{pulse}} = 10/\omega$ și $z_0 = t_0 = 0$. Panoul stâng al fiecărei figuri este o izo-suprafață pentru $w(\mathbf{r}, t) = w_{\text{max}}/4$, panoul mijlociu este o proiecție a intensității maxime, iar panoul final este o serie de trei hărți de culoare care prezintă densitatea de energie. Fasciculele sunt focalizate în planul xOy la $z = 0$.



(a) $p = 2, m = 2$



(b) $p = 2, m = -2$

Figura 2.3: Idem fig. 2.3, dar pentru polarizare liniară $p = 2, m = -2$.

Ecuatiile de Mișcare Relativiste

3.1 Formule Generale

În cadrul tezei, ne-am propus să studiem transferul momentului cinetic de la fascicul de lumină structurată către electroni prin accelerare directă, deci este de cea mai mare importanță să putem calcula eficient traiectoriile particulelor antrenate de fasciculele LG.

Întrucât există mai multe variante de calcul, a trebuit să măsurăm performanța algoritmilor de integrare a ecuațiilor diferențiale pentru fiecare variantă.

Prima variantă este cea pornind de la a doua lege a lui Newton, scrisă în termeni de impuls corect relativist,

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad \mathbf{p} = m_0\gamma(\mathbf{v})\mathbf{v}, \quad (3.1)$$

unde m_0 este masa de repaus a particulei și $\gamma(\mathbf{v})$ este factorul Lorentz

$$\gamma(\mathbf{v}) = \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.2)$$

Ecuatiile de mișcare se reduc la un set de 6 ecuații diferențiale ordinare și explicite de ordinul întâi

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad (3.3a)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{m_0\gamma(\mathbf{v})} \left(\mathbf{F} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{c^2} \mathbf{v} \right) \quad (3.3b)$$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \quad (3.3c)$$

unde \mathbf{F} este forța Lorentz.

Cealaltă alternativă este formularea manifest covariantă a ecuațiilor de mișcare. În acest caz, avem următorul sistem de 8 ecuații diferențiale ordinare explicite de ordinul întâi

$$\frac{dx^\mu}{d\tau}(\tau) = u^\mu(\tau) \quad (3.4a)$$

$$\frac{du^\mu}{d\tau}(\tau) = \frac{q}{m_0} F^{\mu\nu}(x^\rho(\tau)) g_{\nu\sigma} u^\sigma(\tau). \quad (3.4b)$$

unde x^μ este forma contravariantă a vectorului 4-poziție,

$$x^\mu = (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{r}), \quad (3.5)$$

în sistemul laboratorului în termeni de timp t și poziție \mathbf{r} . Iar integrarea se realizează în termeni de *timpul propriu*, τ , care este o cantitate de timp, inerentă fiecărei particule urmărite, care acumulează timpul scurs dintr-un sistem de referință care se mișcă în fiecare moment în aceeași direcție și cu aceeași viteză ca și dinamica particulei pe care o investigăm,

$$\tau(T) = \int_{t_0}^T \frac{dt}{\gamma(\mathbf{v}(t))}. \quad (3.6)$$

Forța Lorentz este în acest caz scrisă prin intermediul tensorului Faraday, care organizează componentele câmpului ele

$$F^{\mu\nu} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

iar noi am utilizat metrica $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Diferența cheie între cele două metode este că sistemul eq. (3.3) prezintă o discontinuitate atunci când $|\mathbf{v}| \rightarrow c$, în timp ce eq. (3.4) evită această problemă (cu care ne vom confrunta frecvent la amplitudini mari ale fasciculului incident) cu prețul de a adăuga două ecuații diferențiale în sistem și de a pierde simultan dependența explicită cu raport la timpul laboratorului.

3.2 Compararea algoritmilor numerici de integrare a ecuațiilor de mișcare

Plecând de la metodologia detaliată în [60], o modalitate de a evalua calitatea soluțiilor produse de cele două sisteme de ecuații este prin compararea rezultatelor integrării numerice în raport cu o soluție analitică cunoscută.

A fost demonstrat că plasarea unei particule într-o undă plană polarizată liniar, într-un punct în care potențialul vectorial este zero (în etalonare Coulomb),

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

cu viteză inițială

$$\mathbf{v}_0 = -\frac{\mathbf{k}}{k} \frac{c}{\frac{4}{a_0^2} + 1}$$

rezultă într-o mișcare periodică denumită o „figură 8” [29, 61]. Aici $a_0 = qA/(m_0c)$ este parametrul adimensional de intensitate al câmpului, iar \mathbf{k} este vectorul de undă.

O astfel de traiectorie, realizată pentru un electron ($q = e$ și $m_0 = m_e$) prin integrarea numerică a ecuațiilor(3.4) acționată de un câmp electromagnetic de forma

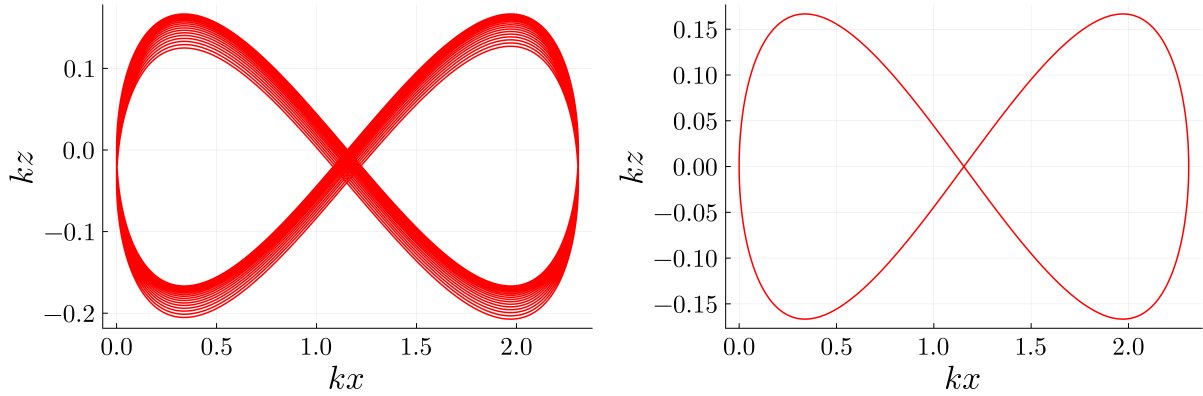
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_x \omega A \cos(kz - \omega t) \quad (3.8a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_y k A \cos(kz - \omega t) \quad (3.8b)$$

în sistemul de referință al laboratorului este prezentată în fig. 3.1. Aici, am ales $a_0 = 2$, k și ω corespund la $\lambda = 800$ nm.

Integrarea numerică a fost realizată în limbajul de programare *Julia* [62, 63], folosind suita de software (pachetul) open source `DifferentialEquations.jl` [64]. Acesta oferă o multitudine de algoritmi (*solver-e*), specializați pentru diverse tipuri de probleme.

Figura 3.1a ilustrează modul în care *solver*-ul ales automat de pachet nu reușește să mențină o orbită stabilă, în timp ce în figura 3.1b putem vedea clar că, pe parcursul unui număr mai mare de iterații, *solver*-ul `Vern9()` păstrează particula pe orbită.



(a) Traiectoria primelor 20 de perioade calculată cu setările automate furnizate de pachet. (b) Traiectoria primelor 100 de perioade calculată cu `Vern9()`, `reltol = 1e-9` și `abstol = 1e-9`.

Figura 3.1: O comparație a traiectoriilor calculate cu un *solver* ales de `:auto` și respectiv de *solver*-ul `Vern9()` cu toleranțe specificate; ambele figuri sunt scalate cu numărul de undă k .

Astfel, am testat 73 dintre algoritmi puși la dispoziție de către pachetul sus-numit. Pentru a putea evalua obiectiv performanțele fiecăruia, am înregistrat timpul de calcul, cantitatea de memorie utilizată și eroarea indusă.

Traiectoria „figurii 8” în sistemul de referință al laboratorului, este dată de ecuația implică $f(x, z) = 0$, unde

$$f(x, z) = 16k^2z^2 + kx(kx - 2s)^2(kx - 4s), \quad (3.9)$$

și s este un factor adimensional, care depinde de a_0 după cum urmează

$$s^2 = \frac{a_0^2}{4 + 2a_0^2}. \quad (3.10)$$

Astfel, definim *eroarea reziduală* că fiind $\varepsilon = |f_{\text{numeric}} - f_{\text{analytic}}|$ și pentru a accentua efectul acumulării de eroare pe parcursul integrării definim *eroarea reziduală ponderată în timp*,

$$\langle \varepsilon \rangle_{\text{TW}} = \int_0^T \tau |f_{\text{numeric}}(\tau)| d\tau / \int_0^T \tau d\tau \quad (3.11)$$

Un ultim aspect de menționat este că, deoarece Julia are inferență dinamică de tipuri, alocările dinamice de memorie care privesc variabile ale căror tipuri nu pot fi deduse în timpul compilării încetinesc semnificativ execuția codului. Din acest motiv, se recomandă ca operațiunile care consumă multă memorie să fie efectuate *in-place*, peste memoria deja alocată, ori de câte ori este posibil. Ca o excepție de la regulă, pentru sistemele ODE cu un număr suficient de mic de ecuații, utilizarea tipurilor de date imuabile, dimensionate

static, cum ar fi cele furnizate de `StaticArrays.jl`, poate produce o accelerare semnificativă prin valorificarea alocărilor de tip stivă ale CPU [65]. Astfel, vom avea patru configurații de testat: covariant manifest vs. covariant non-manifest și integrare in-place vs. integrare out-of-place.

Figura 3.2 prezintă în mod condensat rezultatele măsurate pentru cele 73 de solver-e testate. Fiecare solver este reprezentat de un punct, abscisa reprezintă eroarea reziduală ponderată în timp, iar ordonata este timpul de execuție. Rezultatele detaliate sunt disponibile în capitolul de anexe al tezei, respectiv tabelele 7.1, 7.2, 7.3 și 7.4.

Astfel, dintre algoritmi cu pas adaptiv, există o serie de solver-e rapide cu erori reziduale reduse, și anume familia `Vern` [66], metoda canonică Runge-Kutta de ordinul 4th RK4 [67], familia `OwrenZen` [67], precum și DP5 [68], DP8 [69] și `Tsit5` [70]. Cu toate acestea, este destul de clar că `Vern9` este cel mai robust dintre toți.

Într-adevăr, testele noastre de referință sunt în concordanță cu cele ale *SciML Benchmarks* — care pot fi găsite la [71] — în care se poate constata că solver-ul `Vern9` este cel mai performant solver pentru sisteme nerigide de ecuații diferențiale.

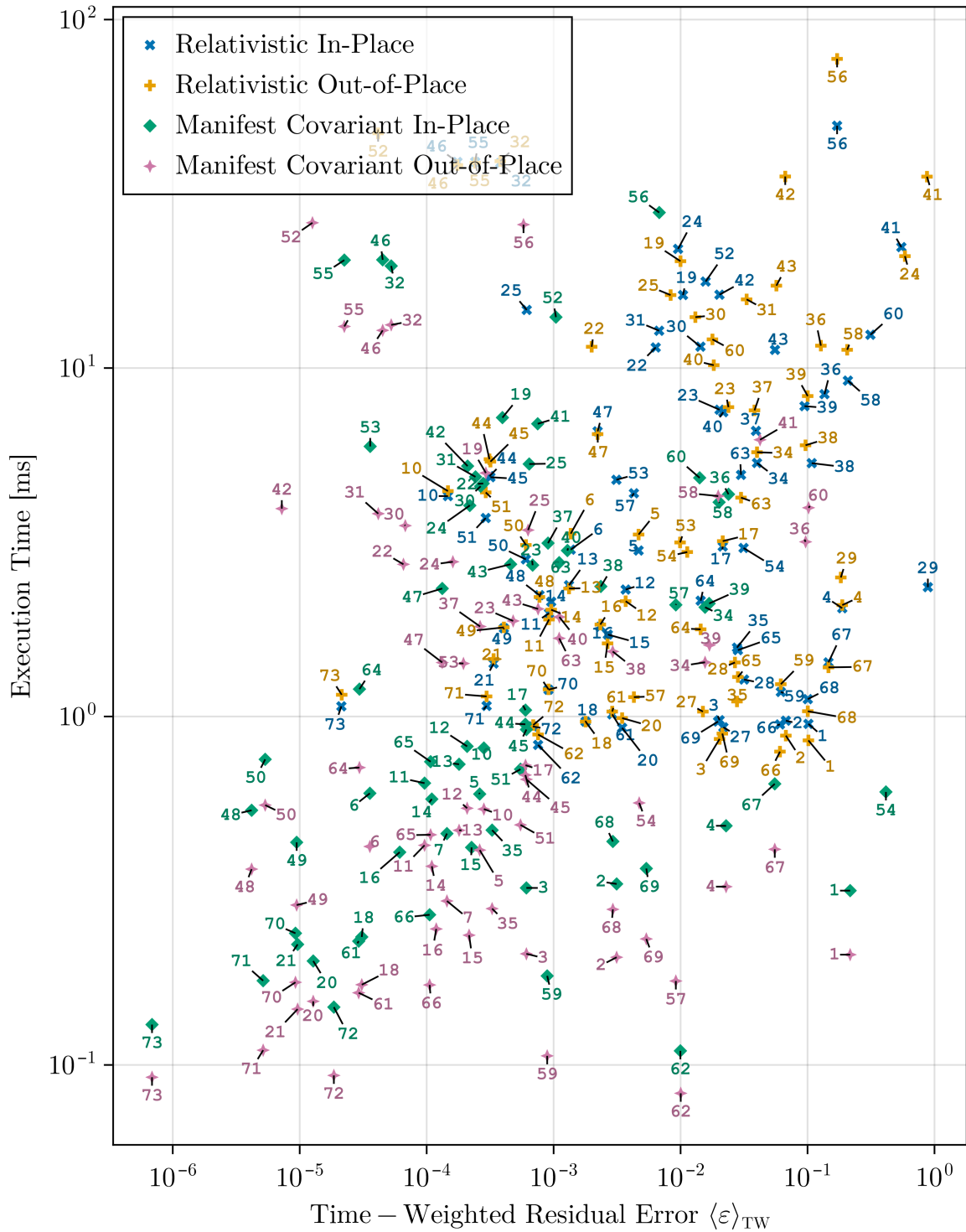


Figura 3.2: Diagramă de dispersie a timpului de calcul pentru soluția numerică pentru ecuațiile (3.3) (albastru și galben) și (3.4) (verde și violet), atât pentru implementare „in-place”, cât și pentru cei „out-of-place”, în funcție de eroarea reziduală ponderată în timp (3.11).

Transferul de Moment Cinetic de la Modurile LG către Electroni

Pentru investigațiile numerice, metodologia noastră a fost de a distribui un număr larg de particule ($10^4 - 10^8$), inițial în repaus în sistemul de referință al laboratorului, în planul focal al unui fascicul LG, modulată de o anvelopă temporală de tipul (2.7). Astfel, utilizând integrarea numerică a ecuațiilor (3.4) am putut obține comportamentul dinamic al particulelor, iar odată ce câmpul s-a atenuat suficient, particulele rămân cu un câștig (sau o scădere) a momentului cinetic, pe care îl putem calcula.

4.1 Legi de scalare

Utilizând simulările numerice detaliate mai sus, am urmărit comportamentul momentului cinetic al ansamblului în diferite condiții. Astfel, am calculat media peste toate particulele, respectiv, valoarea maximă găsită în ansamblu, pentru momentul cinetic final (când pulsul a plecat din vecinătatea particulelor). Am repetat simulările pentru diferite ordine (p, m) și pentru cele două polarizări cheie, circular polarizat, respectiv liniar polarizat.

Punând rezultatele obținute ca funcție de a_0 într-o diagramă de dispersie cu axele în scară logaritmică, a se vedea exemplul din figura 4.1, putem observa grafic cum depinde finală, atât pentru $\text{mean}(L_z^{\text{final}})$ (valoarea medie) cât și pentru $\text{max}(L_z^{\text{final}})$ (valoarea maximă), are aspectul a două regimuri distincte, ambele cu dependență liniară.

Acest fapt se traduce printr-o dependență de tip putere a rezultatului final de a_0 ,

$$f(L_z^{\text{final}}) = \exp(A)a_0^B, \quad (4.1)$$

unde f reprezintă fie media, fie maximumul, așa cum este detaliat mai sus.

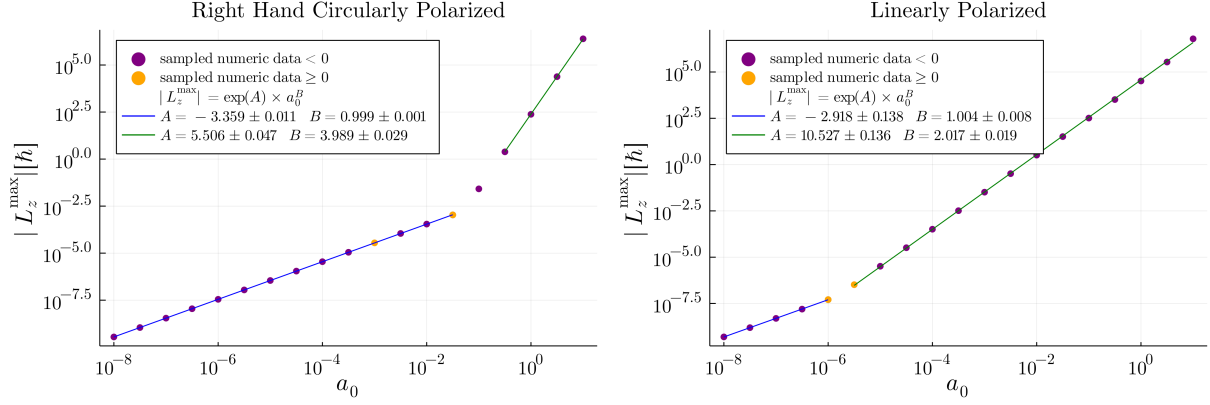
Așa cum era de așteptat, invariant la polarizare, sau la ordinul azimutal, când parametrul a_0 este mic, dependența este liniară,

$$f(L_z^{\text{final}}) \propto a_0, \quad a_0 \ll 1. \quad (4.2)$$

În schimb, după ce se face complet tranziția în regimul de a_0 mare, legea de scalare obținută numeric depinde de polarizare după cum urmează,

$$(L_z^{\text{final}})_{\text{Liniar}} \propto a_0^2 \quad (L_z^{\text{final}})_{\text{Circular}} \propto a_0^4. \quad (4.3)$$

Distincția se poate observa și în ceea ce privește plaja de valori pentru care se respectă regimul liniar, respectiv cel de tip putere, și anume, pentru polarizarea liniară, tranziția are loc mult mai devreme, punctul de inflexiune survenind cu ordine de mărime mai jos față de cazul circular polarizat.



(a) Polarizare circulară de dreapta; Mod LG de ordin $p = 2$, $m = -2$. (b) Polarizare liniară pe axa Ox ; Mod LG de ordin $p = 2$, $m = -2$.

Figura 4.1: Legi de scalare pentru momentul cinetic maxim pe distribuția particulelor calculate; panouri selectate din figurile publicate original în [28].

4.2 Aproximații Analitice

Tensorul Lorentz al momentului cinetic relativist este dat de

$$M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu, \quad (4.4)$$

unde identificăm $L_x \equiv M^{23}$, $L_y \equiv M^{31}$ și $L_z \equiv M^{12}$. În plus, putem găsi un echivalent relativist al cuplului luând derivata lui (4.4) în raport cu timpul propriu și găsim că momentul forței Lorentz asupra particulei este

$$\frac{dM^{\mu\nu}}{d\tau} = qu_\rho (x^\mu F^{\nu\rho} - x^\nu F^{\mu\rho}). \quad (4.5)$$

Astfel, componenta L_z a unei particule evoluează în timp conform

$$\begin{aligned} \frac{dL_z}{d\tau} = q\gamma(u) & [(xE_y(t, x, y, z) - yE_x(t, x, y, z)) \\ & - (xu_x + yu_y) B_z(t, x, y, z) \\ & + (xB_x(t, x, y, z) + yB_y(t, x, y, z)) u_z] \end{aligned} \quad (4.6)$$

unde am folosit notația obișnuită în loc de cea covariantă. Putem simplifica în continuare această expresie utilizând proprietățile particulare ale fasciculelor paraxiale,

$$\frac{dL_z}{d\tau} = q\gamma \left[(xE_y - yE_x) \left(1 - \frac{u_z}{c} \right) - (xu_x + yu_y) B_z \right]. \quad (4.7)$$

Dacă câmpurile sunt suficient de slabe astfel încât viteza particulei să se mențină $|\mathbf{u}| \ll c$, atunci putem neglija termenul magnetic. Putem aproxima în continuare momentul cinetic câștigat de particulă (considerând $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ și neglijând implicit dinamica), luând integrala de timp a componentei electrice rămase a cuplului, în timp ce $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_{\text{initial}}$. Astfel, variația momentului cinetic, în funcție de coordonatele inițiale ale particulelor, va fi dată de

$$\Delta L_z(\mathbf{r}_{\text{initial}}) \approx \int_{\tau_i}^{\tau_f} q\gamma(xE_y - yE_x) d\tau = \int_{t_i}^{t_f} q(xE_y - yE_x) dt, \quad (4.8)$$

unde remarcăm că pentru orice dependență de coordonate înlocuim

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \longrightarrow (x_{\text{inițial}}, y_{\text{inițial}}, z_{\text{inițial}}).$$

Datorită faptului că câmpul nostru este înzestrat cu o anvelopă temporală, rezultatul va fi întotdeauna finit. Prin urmare, putem considera integrala pe $(-\infty, \infty)$ ca fiind rezultatul net al câmpului nostru pulsant.

Când câmpul electric este dat (2.4), respectiv (2.5), sunt modulate de anvelopa (2.7), momentul cinetic indus estimat ca integrală de timp față de cuplul (4.8), $\tau_{\text{pulse}} = n/\omega$, poate fi calculat analitic și ia forma

$$\begin{aligned} \Delta L_z(\mathbf{r}) = & qN_{pm}E_0\sqrt{\pi}\frac{n}{\omega}\frac{w_0}{w(z)}\left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)}\right)^{|m|}L_p^{|m|}\left(\frac{2\rho^2}{w^2(z)}\right)\exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2(z)}-\frac{n^2}{4}\right)\times \\ & \left[x \operatorname{Re}\left(\xi_y \exp\left(-im\phi - \frac{ik\rho^2}{2R(z)} + i(2p + |m| + 1)\psi(z) + i\Phi_0\right)\right) \right. \\ & \left. - y \operatorname{Re}\left(\xi_x \exp\left(-im\phi - \frac{ik\rho^2}{2R(z)} + i(2p + |m| + 1)\psi(z) + i\Phi_0\right)\right) \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

unde amintim că formula este pentru particule în focus, adică $z = 0$. Acest rezultat trebuie înțeles ca fiind valid în limita $a_0 \ll 1$, el se aplică foarte bine pentru acest caz.

Graficul din partea stângă a Fig. 4.2 este o hartă normalizată a estimării momentului cinetic (4.9) cu $z = 0$ și în funcție de coordonatele din planul xy . Folosim culoarea pentru a reprezenta momentul cinetic estimat normalizat pe direcția z . În partea dreaptă a Fig. 4.2 sunt rezultatele pentru patru simulări numerice a 10.000 de particule pentru diferite a_0 , unde fiecare punct corespunde coordonatelor inițiale ale particulei în planul xy și este colorat în funcție de momentul cinetic final căpătat de acea particulă pe aceeași schemă de normalizare. Acest set de figuri este pentru cazul unui impuls Laguerre-Gauss polarizat liniar ($\xi_x = 1$, $\xi_y = 0$) de ordinul $p = 2$ și $m = -2$ cu $w_0 = 75\lambda$, $\lambda = 800\text{nm}$ și fază inițială $\varphi_0 = 0$. Modelul prezent în Fig. 4.2b) este, de asemenea, reprezentativ pentru $a_0 < 10^{-8}$, în timp ce Fig. 4.2e) este, de asemenea, reprezentativ pentru $a_0 > 1$.

Analog, în Fig. 4.3, graficul din partea stângă este o hartă a estimării momentului cinetic normalizat (4.9) pentru impulsul Laguerre-Gauss polarizat circular ($\xi_x = 1/\sqrt{2}$, $\xi_y = i/\sqrt{2}$) de ordinul $p = 2$ și $m = -2$ cu $w_0 = 75\lambda$, $\lambda = 800\text{nm}$ și faza inițială $\varphi_0 = 0$. În mod similar, modelul prezent în Fig. 4.3b) este, de asemenea, reprezentativ pentru $a_0 < 10^{-3}$, în timp ce Fig. 4.2e) este, de asemenea, reprezentativ pentru $a_0 > 1$.

Pentru polarizările consacrate, dependența azimutală a expresiei de mai sus se reduce la

$$\Delta L_z(\mathbf{r}) \propto \begin{cases} -2 \sin(\phi) \cos(-m\phi + \varphi_0), & \text{polarizare liniară pe } x \\ 2 \cos(\phi) \cos(-m\phi + \varphi_0), & \text{polarizare liniară pe } y \\ -\sqrt{2} \sin(\phi - m\phi + \varphi_0), & \text{polarizare circulară de dreapta} \\ \sqrt{2} \sin(-\phi - m\phi + \varphi_0), & \text{polarizare circulară de stânga.} \end{cases} \quad (4.10)$$

ceea ce ne dă posibilitatea să explorăm efectul fazei inițiale asupra momentului cinetic final al particulelor.

Efectul fazei inițiale φ_0 este acela de a induce o rotație în planul xy al distribuției de L_z^{final} în funcție de coordonatele inițiale ale particulei. Prin gruparea fazei inițiale cu coordonata azimutală ($\phi + \frac{\varphi_0}{-m+s}$), unde $s \in \{-1, 0, 1\}$ în funcție de polarizarea aleasă,

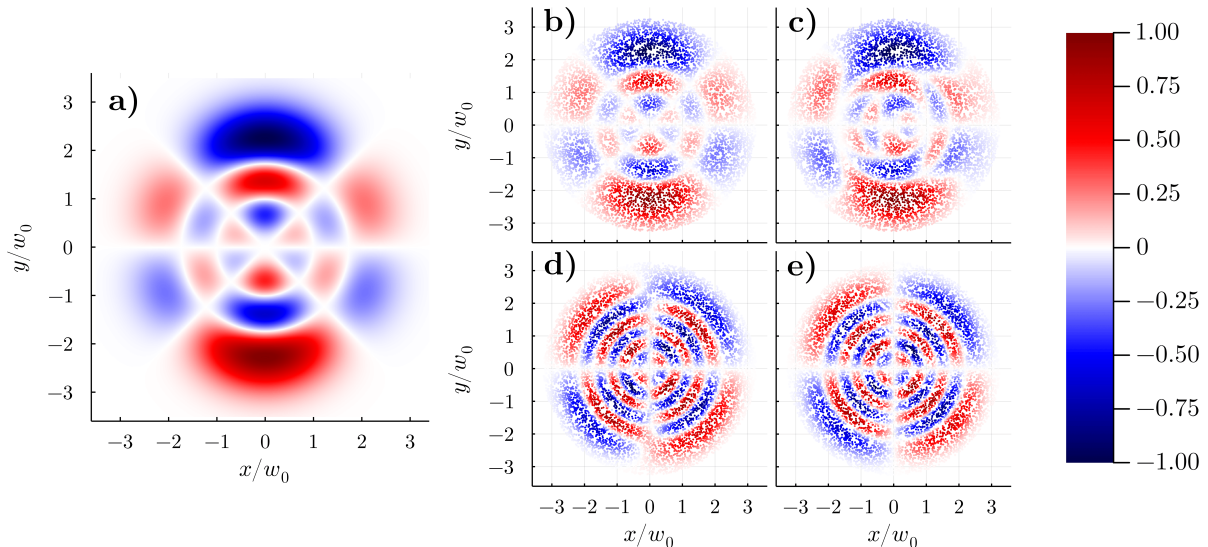


Figura 4.2: L_z^{final} al particulelor cu coordonate inițiale (x, y) după interacțiunea cu un impuls LG polarizat liniar ($\xi_x = 1, \xi_y = 0$) cu $p = 2, m = -2, w_0 = 75\lambda, \lambda = 800\text{nm}$ și fază inițială $\Phi_0 = 0$, normalizată față de $|L_z|^{\text{max}}$. **a)** reprezintă estimarea (4.9), în timp ce grila conține integrarea numerică a (3.4) unde **b)** ($a_0 = 10^{-8}, |L_z|^{\text{max}} = 4.96 \times 10^{-10}\hbar$), **c)** ($a_0 = 2.63 \times 10^{-7}, |L_z|^{\text{max}} = 1.32 \times 10^{-8}\hbar$), **d)** ($a_0 = 10^{-5}, |L_z|^{\text{max}} = 3.23 \times 10^{-6}\hbar$), **e)** ($a_0 = 1, |L_z|^{\text{max}} = 3.73 \times 10^4\hbar$). Publicat inițial în [60].

rotația devine evidentă; vezi figura 4.4. Aceasta înseamnă că pentru $|m| \gg 1$, efectul lui φ_0 devine neglijabil. În plus, în cazul fasciculelor polarizate liniar, va exista în mod necesar o linie dreaptă care trece prin origine, paralelă cu polarizarea, care va avea moment cinetic indus zero și care nu va fi afectată de faza inițială, lăsând distribuția subiacentă a celei de-a doua funcții trigonometrice din prima ramură a (4.10) să absoarbă rotația indusă de faza inițială. În cazul nostru, acea linie va fi de-a lungul $y = 0$.

Pe de altă parte, la o valoare mare a lui a_0 , faza inițială nu are niciun efect vizibil imediat asupra distribuției momentului cinetic indus în funcție de coordonatele inițiale pentru $n = 10$. În schimb, obținem din integrarea numerică inele concentrice cu semne alternative. În cazul fasciculului polarizat liniar, două linii ortogonale împart, de asemenea, distribuția în 4 sectoare cu semne alternative, așa cum se poate observa în figura 4.2 e).

Similar, pornind de formula (4.9), putem genera o regulă de scalare cu durata pulsului/gradiențului intensității dat de anvelopa temporală. Pentru un puls cu durată $\tau_{\text{pulse}} = n/\omega$, avem regula de scalare

$$\Delta L_z \propto n \exp\left(-\frac{n^2}{4}\right). \quad (4.11)$$

Maximul expresiei este atins pentru $n = \sqrt{2}$, pe care îl folosim ca numitor standard. Definim raportul standard ca

$$R_z(n) = \frac{L_z^{\text{final}}(\mathbf{r}_0; n)}{L_z^{\text{final}}(\mathbf{r}_0; \sqrt{2})} = \frac{n}{\sqrt{2}} \exp\left(\frac{1}{2} - \frac{n^2}{4}\right), \quad (4.12)$$

Am suprapus rezultatele unui ansamblu statistic de 1,000 de particule peste curba teoretică normalizată din (4.12), rezultatul fiind prezentat în Fig. 4.5. Observăm o bună concordanță între ec. (4.11) și simularea numerică, atâta timp cât impulsul este suficient

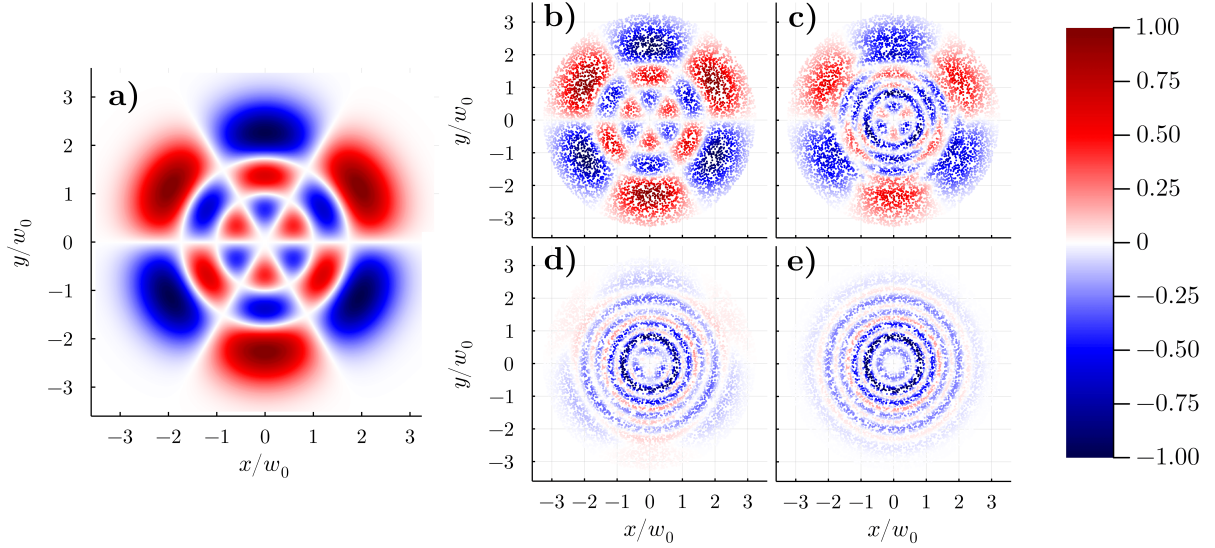


Figura 4.3: L_z^{final} al particulelor cu coordonate inițiale (x, y) după interacțiunea cu un puls LG polarizat circular ($\xi_x = 1/\sqrt{2}$, $\xi_y = i/\sqrt{2}$) cu $p = 2$, $m = -2$, $w_0 = 75\lambda$, $\lambda = 800\text{nm}$ și fază inițială $\phi_0 = 0$, normalizată față de $|L_z|^{\text{max}}$. **a)** reprezintă estimarea (4.9), în timp ce grila conține integrarea numerică a (3.4) unde **b)** ($a_0 = 10^{-3}$, $|L_z|^{\text{max}} = 3.51 \times 10^{-5}\hbar$), **c)** ($a_0 = 5.45 \times 10^{-2}$, $|L_z|^{\text{max}} = 2.07 \times 10^{-3}\hbar$), **d)** ($a_0 = 0.112$, $|L_z|^{\text{max}} = 2.9 \times 10^{-2}\hbar$), **e)** ($a_0 = 1$, $|L_z|^{\text{max}} = 240.09\hbar$). Publicat inițial în [60].

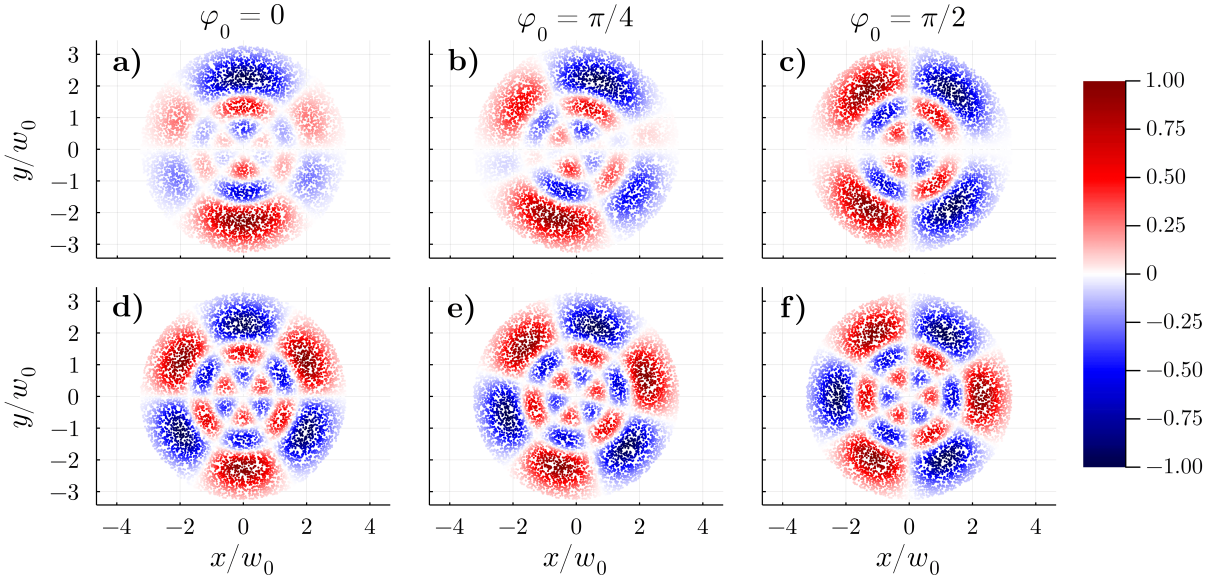


Figura 4.4: Distribuția transversală normalizată a momentului cinetic unghiular transferat unei particule cu coordonatele inițiale (x, y) , $L_z^{\text{final}}(x, y)_{\text{initial}}/|L_z|^{\text{max}}$, calculată numeric pentru polarizare liniară: **a)** $\varphi_0 = 0$, $|L_z|^{\text{max}} = 4.96 \times 10^{-10}\hbar$, **b)** $\varphi_0 = \pi/4$, $|L_z|^{\text{max}} = 4.66 \times 10^{-10}\hbar$, **c)** $\varphi_0 = \pi/2$, $|L_z|^{\text{max}} = 3.83 \times 10^{-10}\hbar$ și polarizare circulară dreaptă: **d)** $\varphi_0 = 0$, $|L_z|^{\text{max}} = 3.51 \times 10^{-10}\hbar$, **e)** $\varphi_0 = \pi/4$, $|L_z|^{\text{max}} = 3.51 \times 10^{-10}\hbar$, **f)** $\varphi_0 = \pi/2$, $|L_z|^{\text{max}} = 3.51 \times 10^{-10}\hbar$, pentru un mod Laguerre-Gauss de ordinul $p = 2$ și $m = -2$ cu $a_0 = 10^{-8}$. Publicat inițial în [60].

de slab (a_0 suficient de mic), cât și scurt (n suficient de mic). În plus, există și o interacțiune între a_0 și n , unde timpul de expunere la câmp pentru care ec. (4.11) devine

incorectă depinde de amplitudinea câmpului incident.

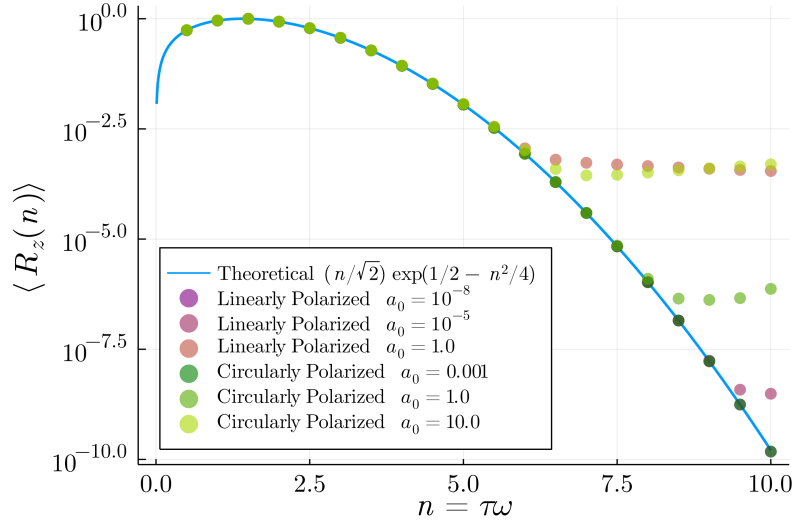


Figura 4.5: Raportul mediu al ansamblului statistic pentru diferite a_0 la aceleași lățimi de impuls suprapuse pe curba teoretică normalizată (4.12). Publicat inițial în [60].

4.3 Particule dincolo de focus

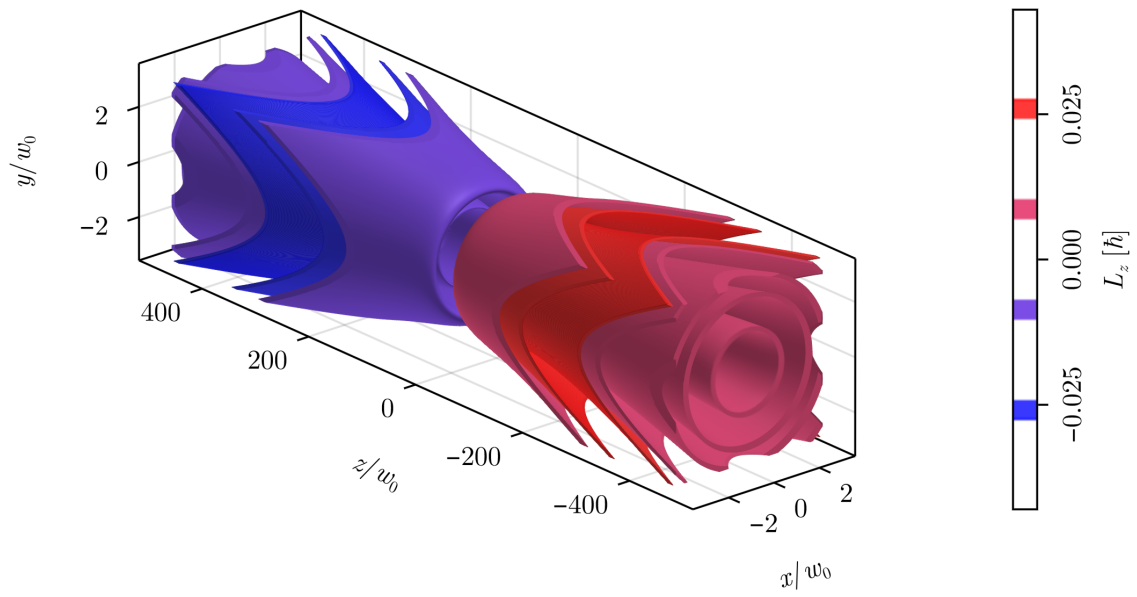
Într-un final, discutăm modul în care fasciculele LG interacționează cu particulele care **nu** sunt planul focal. Datorită accesului acordat la clusterul de înaltă performanță al *Universității din București*, situat în *Facultatea de Fizică*, am putut lua codul scris pentru a integra ecuațiile exacte ale mișcării, detaliat în teza in-extenso și să-l optimizez pentru un număr mai mare de particule.

Pentru acest set de simulări, m-am concentrat exclusiv pe fasciculele LG de ordinul $p = 2$, $m = -2$, modificând doar polarizarea între liniară de-a lungul direcției x și circulară dreaptă. Durata pulsului a fost $\tau_{\text{pulse}} = 10/\omega$.

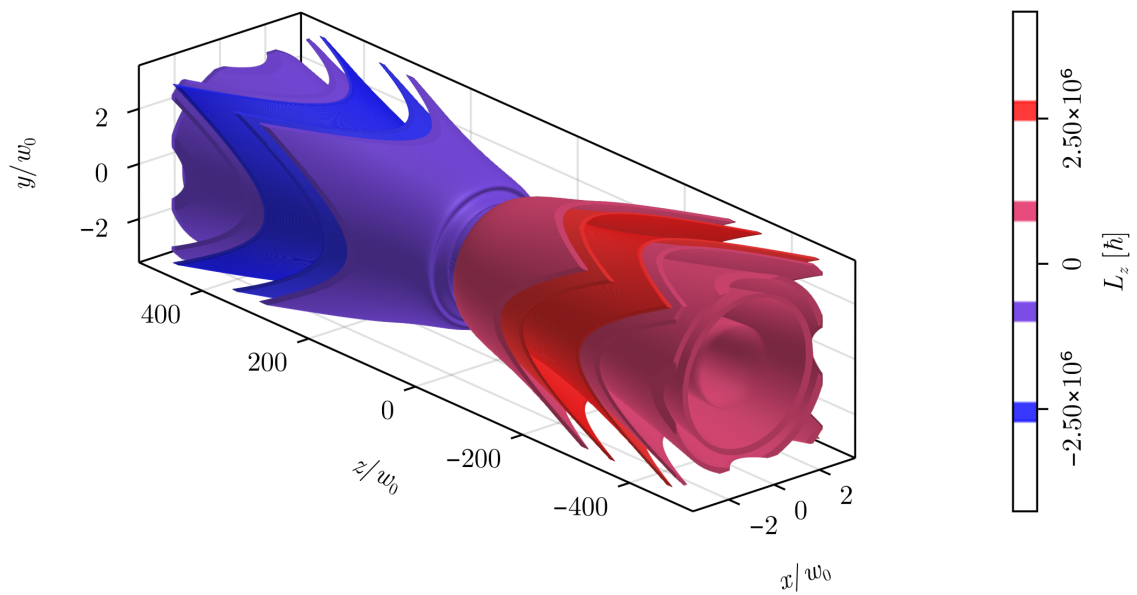
De data aceasta, particulele au fost aranjate de-a lungul unei grile uniforme. În planul Oxy , grila a eșantionat de-a lungul intervalelor $(-3.25w_0, 3.25w_0) \times (-3.25w_0, 3.25w_0)$ și a constatat din $N_x \times N_y = 200 \times 200$ particule per secțiune. Aceste secțiuni au fost distribuite de-a lungul direcției z în puncte echidistante $N_z = 1001$, eșantionând de-a lungul intervalului $(-2z_R, 2z_R)$.

Mai întâi, să observăm distincția dintre figs. 4.6 and 4.7. Ambele figuri prezintă izo-suprafețe pentru L_z^{final} al unei particule ale cărei coordonate inițiale se aflau în punctul respectiv, atât în regimul de a_0 mic și mare, pentru fiecare polarizare. Este imediat evident că distribuția momentului cinetic transmisă de la fascicul la particule este profund afectată de polarizarea fasciculului. Când fasciculul incident este polarizat circular la dreapta, particulele plasate înaintea planului focal, $z < 0$, câștigă un moment cinetic pozitiv în direcția z , în timp ce particulele plasate după planul focal, $z > 0$, câștigă un moment cinetic negativ în direcția z . Acest lucru lasă particulele plasate exact în planul focal cu un răspuns foarte slab.

În figurile 4.8 și 4.9 avem hărți termice 2D care reprezintă secțiuni pentru planurile corespunzătoare din spațiul 3D al condițiilor inițiale, unde fiecare particulă este colorată, la fel ca în figurile 4.2 și 4.3, bazate pe momentul cinetic final al fiecărei particule

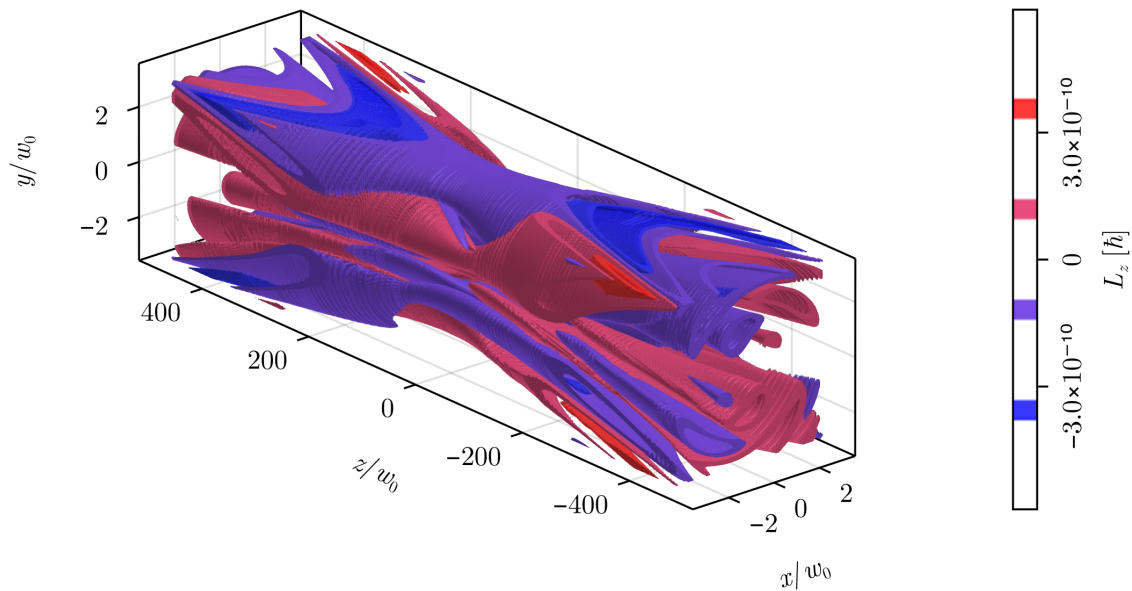


(a) For $a_0 = 10^{-3}$.

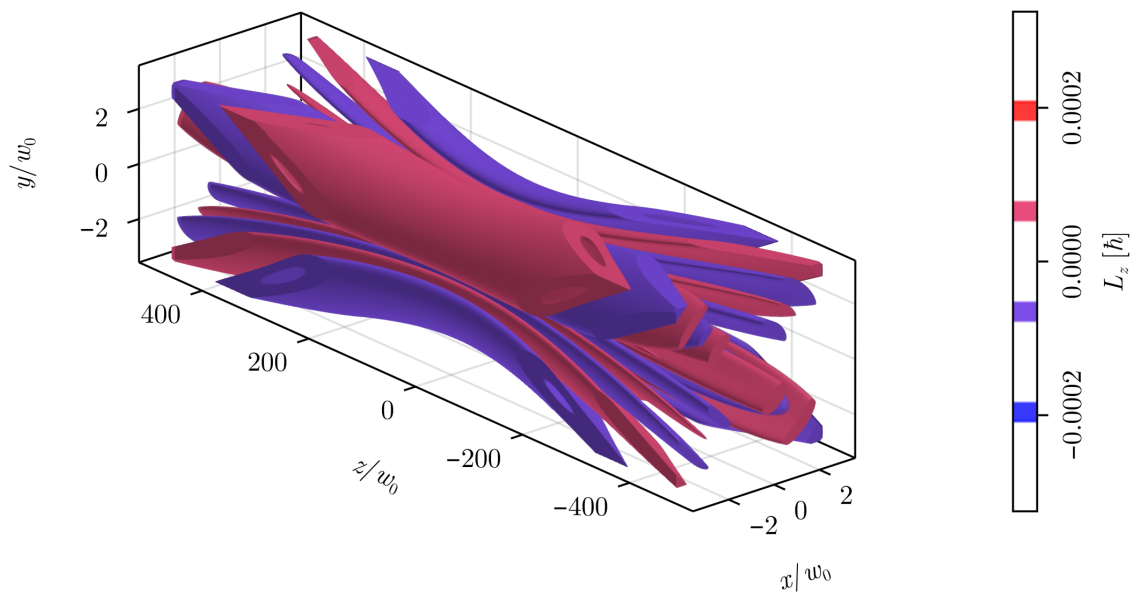


(b) For $a_0 = 10$.

Figura 4.6: Graficul izo-suprafeței $L_z^{\text{final}}(x_0, y_0, z_0)$, transferat către o particulă cu coordonatele inițiale corespunzătoare, după ce a fost împrăștiată de un fascicul polarizat circular pe dreapta. Faza inițială a fost $\varphi_0 = 0$.



(a) For $a_0 = 10^{-8}$.



(b) For $a_0 = 10^{-4}$.

Figura 4.7: Graficul izo-suprafețe $L_z^{\text{final}}(x_0, y_0, z_0)$, transferat către o particulă cu coordonatele inițiale corespunzătoare, după ce a fost împrăștiată de un fascicul polarizat liniar în direcția x . Faza inițială a fost $\varphi_0 = 0$.

eșantionate din grilă. Menționăm că, fig. 4.8 eșantionează datele sale din aceeași simulare ca și secțiunea 4.3. Secțiunea xy a fost deplasată intenționat înainte, deoarece valorile calculate pentru particulele cu condiții inițiale $z_0 = 0$ sunt mult mai mici decât mediana pe celelalte secțiuni transversale și, în consecință, ar produce un fundal alb atunci când sunt scalate corespunzător.

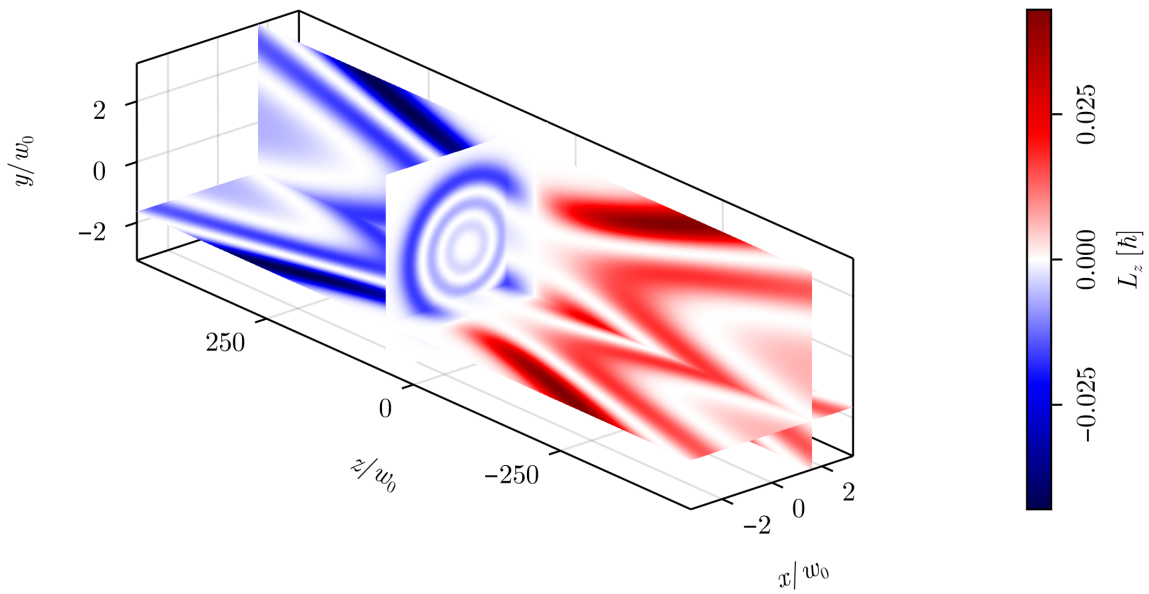
Acest fapt, împreună cu scalarea cuartică observată în [28], ar trebui considerat ca indicii ale faptului că momentul cinetic transferat de un fascicul polarizat circular către o particulă de test încărcată, atunci când aceasta este plasată în focar, este, de fapt, un efect de *ordin superior*.

Inelele care apar în panourile **d** și **e** din fig. 4.3 apar doar pe măsură ce conurile separate anterior încep să se extrudeze dincolo de planul $z = 0$, în domeniul celuilalt.

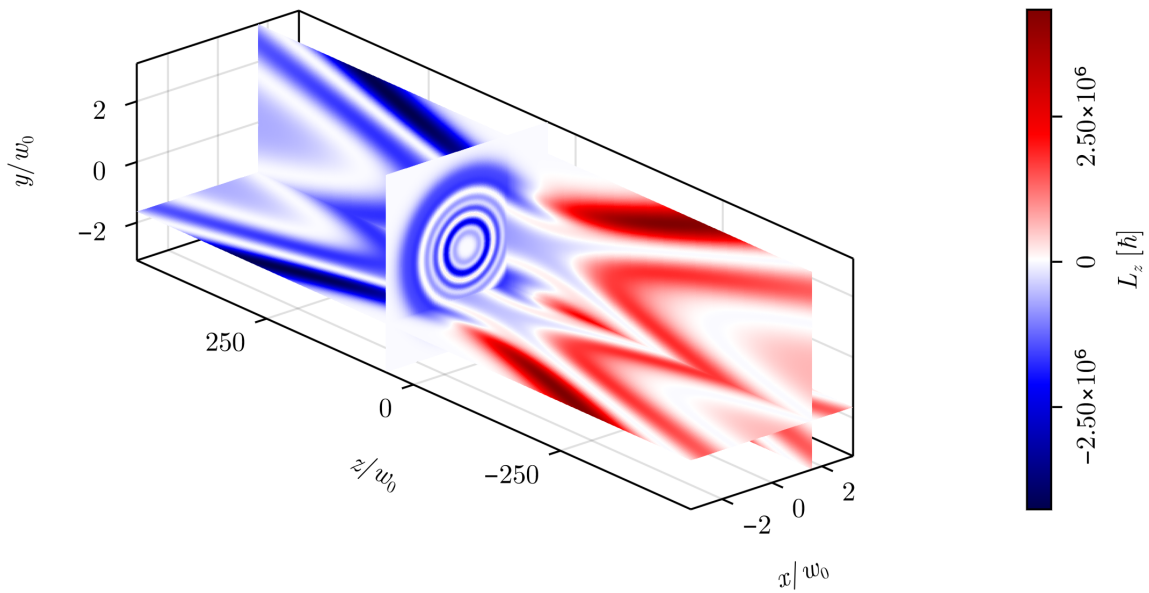
Din figura 4.7 observăm că, spre deosebire de cazul polarizării circulare, polarizarea liniară produce domenii cu semn alternativ care se extind pe întregul interval pe z . Figura 4.9 oferă o perspectivă alternativă asupra modului în care aceste domenii se intersectează, alternând semnul lui L_z^{final} .

Știm, pe baza lucrării lui Dmitriev și Korneev [22], că după contribuția de ordinul doi, abia cea de ordinul patru nu este nulă, la L_z^{final} conform teoriei perturbațiilor, care vor scala după a_0^2 și respectiv a_0^4 . În consecință, deoarece izo-suprafețele de moment cinetic pentru cazul polarizat liniar trec deja prin planul focal, putem observa imediat legătura cu scalarea pătratică. În schimb, izo-suprafețele pentru polarizarea circulară se extrudează în planul focal doar odată ce intensitatea devine foarte mare, ceea ce ar conecta-o cu o corecție de ordinul 4.

Similar cu investigația noastră 2D anterioară, extrudând în 3D, vedem din nou că în cazul polarizat liniar, faza inițială a fascicului incident poate fi înțeleasă ca o rotație în distribuția lui L_z^{final} . Acest lucru este vizibil în figurile din anexa 7.6 de la finalul tezi in-extenso. Diferența la o schimbare de fază de $\pi/2$ este echivalentă cu o rotație de $-\pi/4$, până la o inversare a semnului la $y = 0$, exact așa cum a fost prezis de eq. (4.10).

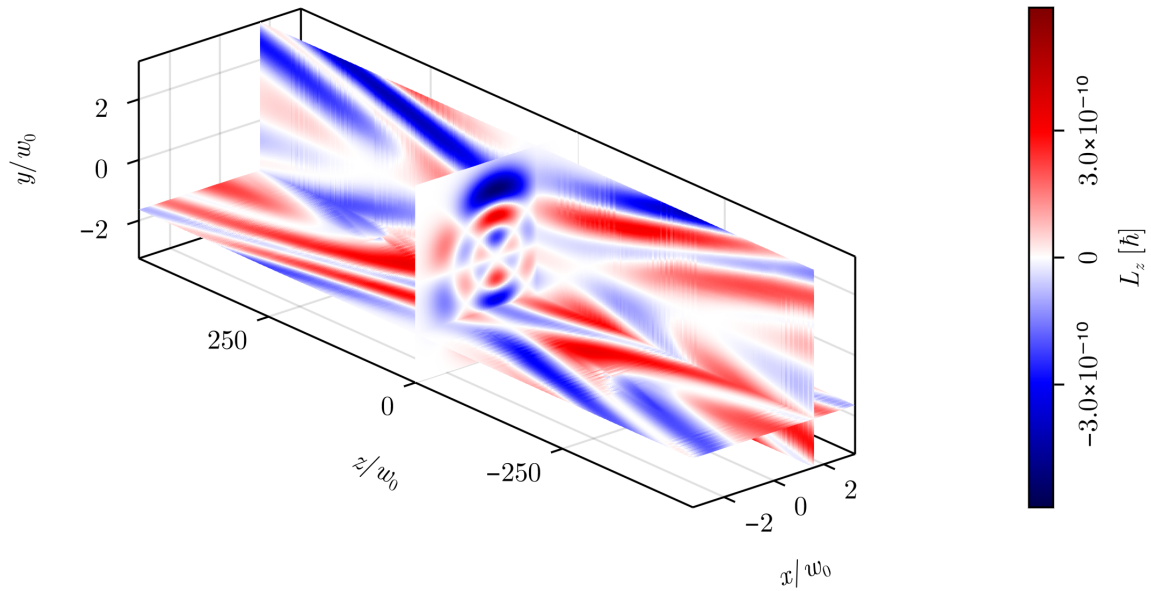


(a) Pentru $a_0 = 10^{-3}$.

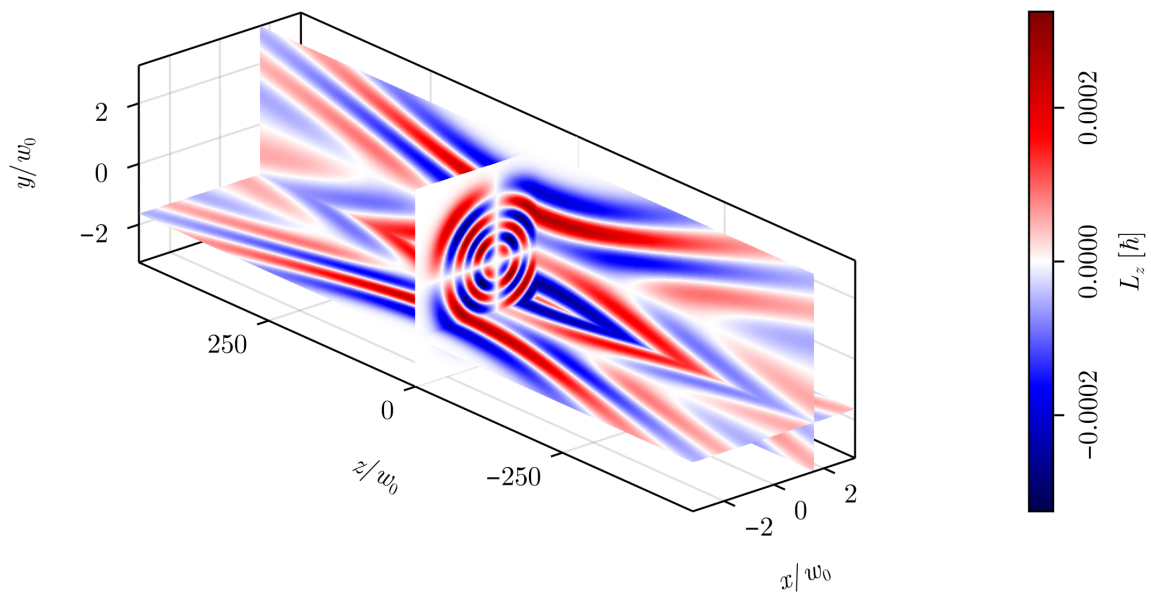


(b) Pentru $a_0 = 10$.

Figura 4.8: Trei hărți termice ortogonale colorate în funcție de momentul cinetic final în punctul corespunzător din spațiul 3D al coordonatelor inițiale. Condițiile identice cu fig. 4.6.



(a) Pentru $a_0 = 10^{-8}$.



(b) Pentru $a_0 = 10^{-4}$.

Figura 4.9: Trei hărți termice ortogonale colorate în funcție de momentul cinetic final în punctul corespunzător din spațiul 3D cu coordonate inițiale. Condițiile identice cu fig. 4.7.

Împrăștierea Thomson a Modurilor LG

De ce avem nevoie pentru a construi câmpul electromagnetic împrăștiat? Mai întâi, traiectoriile particulelor și apoi radiația rezultată. Apoi, putem trece la însumarea coe-rentă pe o distribuție 2D a electronilor plasați în planul focal.

5.1 Aproximația unei plane locale

Astfel, pentru a putea duce calculul analitic cât mai departe, ar fi foarte utilă o aproximație analitică explicită a traiectoriei particulelor care sunt mișcate de câmp. În acest scop, am introdus *aproximația unei plane locale*, în care câmpul resimțit de o particulă este dat de o undă plană, cu amplitudini determinată de magnitudinea formei canonice a câmpului, la coordonatele inițiale ale particulei.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\text{PW}}(\mathbf{r}, t) &= E_0 N_{pm} \operatorname{Re} \left((\mathbf{e}_x \xi_x + \mathbf{e}_y \xi_y) u_{pm}(\mathfrak{R}_0) e^{i\chi} \right) \\ \mathbf{B}_{\text{PW}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E}_{\text{PW}}(\mathbf{r}, t).\end{aligned}\tag{5.1}$$

unde $\chi = k_L z - \omega_L t$, iar $\mathfrak{R}_0 = (\rho_0, \Phi_0, 0)$, în coordonate cilindrice.

Suntem îndreptățiți să facem asta atâta timp cât, particula rămâne în vecinătatea coordonatelor inițiale. Acest fapt este îndeplinit atunci când $a_0 < 1$, iar $w_0 > 75\lambda$, condiții pentru care aproximația a fost validată numeric, prin integrarea ecuațiilor exacte (3.4), pentru câmpul descris în ecuațiile (2.4), (2.5) și (2.6).

Astfel, pentru o particulă plasată în planul focal, potențialul vectorial corespunzător, în etalonare Coulomb, ia forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = A_0(\rho_0) (\mathbf{e}_x \zeta_x \cos(\chi - m\Phi_0) + \mathbf{e}_y \zeta_y \sin(\chi - m\Phi_0))\tag{5.2}$$

unde am introdus notația, $\xi_x = i\zeta_x$ și $\xi_y = -\zeta_y$, iar $\zeta_{x,y} \in \mathbb{R}$ fără pierderea generalității. În mod natural definim

$$A_0(\rho_0) = \frac{E_{pm}^0}{\omega} \left(\frac{\sqrt{2}\rho_0}{w_0} \right)^{|m|} L_p^{|m|} \left(\frac{2\rho_0^2}{w_0^2} \right) e^{-\frac{\rho_0^2}{w_0^2}}\tag{5.3}$$

$$a(\rho_0) = \frac{|q|A(\rho_0)}{mc}\tag{5.4}$$

care este amplitudinea locală, respectiv parametrul de intensitate adimensional local.

În acest mod putem adapta direct soluțiile analitice consacrate pentru particula an-grenată în mișcare de către unda plană [29] ca să obținem traiectoriile, înlocuind pur și

simplicu $a_0 \rightarrow a(\rho_0)$ și $\phi \rightarrow -m\Phi_0$. Imediat obținem pozițiile,

$$\Delta z(t) = \frac{a^2(\rho_0)}{4k} \left(\chi + \frac{\zeta_x^2 - \zeta_y^2}{2} (\sin(2\chi - 2m\Phi_0) + \sin 2m\Phi_0) \right) \quad (5.5)$$

$$\Delta \mathbf{r}_\perp(t) = \frac{a(\rho_0)}{k} \left(\mathbf{e}_x \zeta_x \sin(\chi - m\Phi_0) - \mathbf{e}_y \zeta_y \cos(\chi - m\Phi_0) \right) \quad (5.6)$$

iar vitezele sub forma factorului Lorentz $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$, derivând relațiile de mai sus după regula funcțiilor compuse și obținem

$$\beta_z(t) = \frac{F(\chi)}{1 + F(\chi)} \quad (5.7)$$

$$\boldsymbol{\beta}_\perp(t) = a(\rho_0) \frac{\mathbf{e}_x \zeta_x \cos(\chi - m\Phi_0) + \mathbf{e}_y \zeta_y \sin(\chi - m\Phi_0)}{1 + F(\chi)} \quad (5.8)$$

unde

$$F(\chi) \equiv \frac{a^2(\rho_0)}{4} (1 + (\zeta_x^2 - \zeta_y^2) \cos(2\chi - 2m\Phi_0)) \quad (5.9)$$

În figura 5.1a ilustrăm o comparație a impulsului particulelor cu diferite coordonate inițiale între integrarea numerică a ecuațiilor exacte și valorile rezultate în urma aproximației unei plane locale. Comparând valorile maxime menționate în legenda fiecărei figuri, putem observa că eroarea este de cel mult 4% la $t = 0$ (aceasta este eroarea acumulată în timpul pornirii câmpului de-a lungul anvelopei $f(\varphi)$) și crește liniar în timp până la aproximativ 7.5% la $t = 10T$. În Fig. 5.1b prezentăm analiza componentei Oz a impulsului. Și în acest caz, din graficele lui δp_z observăm că eroarea relativă se modifică între 6% la $t = 0$ și 10% la $t = 10T$. În final, comparând reprezentările lui p_x și p_z , rezultă că, per total, componenta longitudinală a lui \mathbf{p} este de aproximativ 10% din componenta radială.

5.2 Rezultate Generale

Câmpul radiat de un asemenea electron a cărui mișcare în sistemul de referință al laboratorului este descrisă de $\mathbf{r}(t)$, în punctul de observație \mathbf{x} , la momentul t , are forma generală dată de potențialele Liénard–Wiechert. Astfel, câmpul îndepărtat, $|\Delta \mathbf{r}| \ll |\mathbf{X}|$, poate fi aproximat la primul ordin de

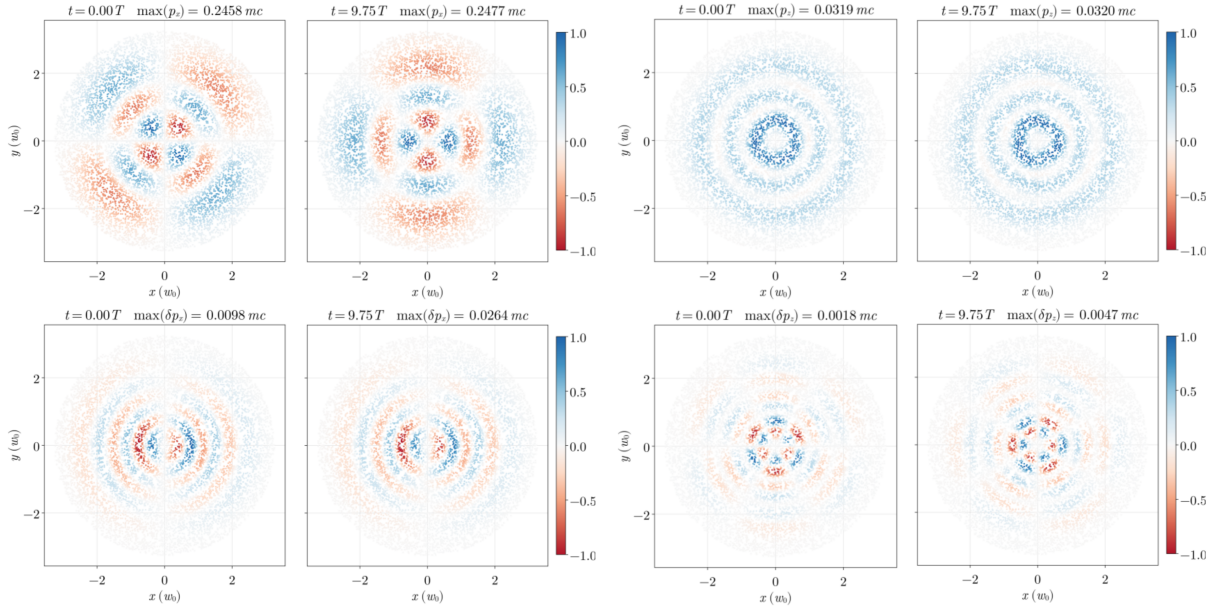
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 X_0} \frac{\mathbf{n}_0 \times \left((\mathbf{n}_0 - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a} \right)}{c^2 (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}_0)^3} \Big|_{t \rightarrow t_r(t)} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{1}{c} \mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (5.11)$$

unde am introdus o nouă notație, explicitată în fig. 5.2, și anume deplasarea de la sarcina la punctul de observație, $\mathbf{X}(t) = \mathbf{x} - \mathbf{r}(t)$, și versorul său \mathbf{n} , respectiv, timpul întârziat/retardat, care indică momentul în care a fost emisă informația provenită de la particulă ce ajunge acum la punctul de observație $t_r = t - X(t_r)/c$.

Astfel, după un calcul extins, se poate arăta că expresia transformatei Fourier temporale a câmpului electromagnetic ia forma unei serii de armonice după cum urmează

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt = \sum_{N=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\epsilon}_N(\mathbf{x}) \delta \left(\omega - N \frac{\omega_L}{\alpha} \right) \quad (5.12)$$



(a) Pentru direcția x .

(b) Pentru direcția z .

Figura 5.1: Valorile instantanee ale p_i^{exact} (rândurile superioare) și $\delta p_i = p_i^{\text{exact}} - p_i^{\text{LPWA}}$ pentru fiecare particulă dintr-un ansamblu statistic de electroni în interacțiune cu un fascicul LG cu $p_L = 2$, $m_L = 2$, $a_0 = 0.5$ pentru diferiți momente $t \in (0, 10T)$ scrise pe fiecare grafică; valoarea maximă a lui $|p_i|$ și respectiv $|\delta p_i|$ este scrisă la fiecare moment în titlul fiecărui grafic. Publicat inițial în [72].

unde modul armonic $\mathfrak{E}_N(\mathbf{x})$ este dat de

$$\mathfrak{E}_N(\mathbf{x}) = -\frac{iq\omega_N a(\rho_0)\sqrt{2\pi}}{8\pi\epsilon_0\alpha c X_0} e^{i\omega_N(X_0-Z_0)/c} e^{iNm_L\Phi_0} \times \left(\boldsymbol{\nu}_z \frac{a(\rho_0)}{2} \left(\mathfrak{J}_N + \frac{\zeta_x^2 - \zeta_y^2}{2} (\mathfrak{J}_{N-2} + \mathfrak{J}_{N+2}) \right) + \boldsymbol{\nu}_- \mathfrak{J}_{N+1} + \boldsymbol{\nu}_+ \mathfrak{J}_{N-1} \right) \quad (5.13)$$

unde \mathfrak{J}_N este o funcție Bessel generalizată care depinde de parametrii câmpului și de geometria punctului de observație, iar pentru argumente mici, ia valori proporționale cu $(a(\rho_0)\theta_0)^N$; definiția completă împreună cu parametrii sunt disponibili în teza in-extenso.

În continuare am calculat câmpul rezultat din împrăștierea coerentă Thomson, de pe o foaie subțire de electroni, plasați în focusul modului LG incident. La limită, însumarea coerentă a contribuțiilor la câmpul electric al unei distribuții uniforme de electroni, poate fi tratat ca drept o integrală peste toate condițiile inițiale $\mathfrak{R}_0 = (\rho_0, \Phi_0, 0)$ (în coordonate cilindrice),

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, \omega) = \sum_i \mathbf{E}_{\mathfrak{R}_0^i}(\mathbf{x}, \omega) \rightarrow \int \overbrace{d^2s}^{\delta q} \sigma(\mathfrak{R}_0) \frac{\delta \mathbf{E}_{\mathfrak{R}_0}}{\delta q}. \quad (5.14)$$

Întrucât distanța Z până la ecranul de observație este mult mai mare decât lungimea de undă a laserului, datorită efectelor de interferență ale câmpurilor electromagnetice emise din diferite puncte ale planului focal, radiația este emisă într-un con cu un unghi de deschidere $\Theta_0 \sim 10^{-2}$ foarte mic (similar difracției Fraunhofer); aceasta poate fi estimată din raportul extensiei radiale a distribuției măsurate pe ecran și valoarea lui Z .

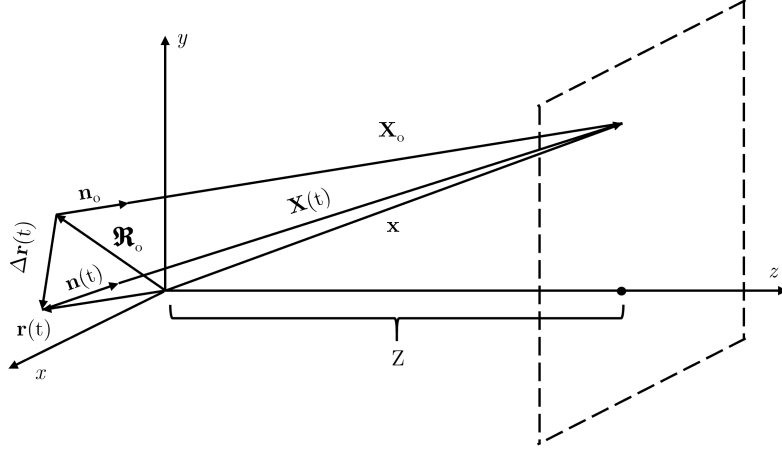


Figura 5.2: Diagrama notațiilor: $\mathbf{r}(t)$ poziția electronului, $\mathfrak{R}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ poziția inițială a electronului, $\Delta\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathfrak{R}_0$ deplasarea particulei, \mathbf{x} punctul de observație, $\mathbf{X}(t) = \mathbf{x} - \mathbf{r}(t)$ punctul observație relativ la particulă, $\mathbf{n}(t) = \mathbf{X}(t)/X(t)$ versorul punctului de observație relativ la particulă, în sistemul de referință al laboratorului.

Astfel, frecvența armonică $\omega_N = N\omega_L/\alpha$, care depinde de zenitul vectorului ce definește direcție de observație față de particulă \mathbf{n} , prin intermediul parametrului $\alpha = 1 + (1 - \cos\theta_0) a^2(\rho_0)/4$, poate fi aproximată ca $\omega_N = N\omega_L$ ($\theta_0 \leq \Theta_0 \ll 1$).

Definim modul armonică N a câmpului îndepărtat $\mathcal{E}_N(\mathbf{x})$ ca integrala peste toate frecvențele apropiate de cea centrală $N\omega_L$, după cum urmează

$$\mathcal{E}_N(\mathbf{x}) = \int_{N\omega_L - \Delta\omega/2}^{N\omega_L + \Delta\omega/2} \mathcal{E}(\mathbf{x}, \omega) d\omega = \int \rho_0 d\rho_0 \int d\Phi_0 \mathbf{E}_N(\mathbf{x}), \quad (5.15)$$

pe care îl putem calcula numeric.

5.3 Rezultate numerice

În cazul polarizării circulare, $\epsilon_L = \zeta_y/\zeta_x = \pm 1$, expresia modului uni-particulă $\mathbf{E}_N(\mathbf{x})$ se reduce la

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_N(\mathbf{x}) \approx (\mathbf{e}_x + i\epsilon_L \mathbf{e}_y) \frac{iq\omega_N a(\rho_0) \sqrt{\pi}}{8\pi\epsilon_0 \alpha c X_0} e^{i\omega_N(X_0 - Z_0)/c} e^{iNm_L\Phi_0} \\ \times \frac{e^{i(N-1)\epsilon_L\phi_0}}{2^{N-1}(N-1)!} \left(N \frac{a(\rho_0)\theta_0}{\sqrt{2}} \right)^{N-1} \end{aligned} \quad (5.16)$$

iar câmpul magnetic ia forma

$$\mathbf{B}_N(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{e}_z}{c} \times \mathbf{E}_N(\mathbf{x}), \quad (5.17)$$

unde am aproximat funcțiile Bessel generalizate în cel mai jos ordin de $(a(\rho_0)\theta_0)$.

Integrând numeric definiția (5.15), utilizând câmpul aproximativ găsit anterior pentru un mod incident LG polarizat circular, găsim următoarele.

În fig 5.3 am prezentat componenta S_z măsurată pe un ecran la distanța $Z = 2 \times 10^5 \lambda$ față de planul focal, pentru trei combinații de valori pentru indicii p_L, m_L : $(0, 0)$, $(0, 1)$ și $(1, 1)$, pentru prima și a doua armonică. În toate cazurile, distribuția S_z este cilindric simetrică în planul ecranului, deci este suficient să o reprezentăm în funcție de coordonata

cilindrică ρ . Obținem în toate cazurile $\Theta_0 \sim \lambda/w_0 \sim \frac{1}{100}$, în acord cu raportul dintre lungimea de undă a laserului și diametrul fasciculului. Diagrama de interferență constă din inele concentrice a căror poziție și dimensiune depind de N, p_L, m_L ; singurul caz în care este prezent un maxim central este pentru armonica fundamentală și $p_L = m_L = 0$.

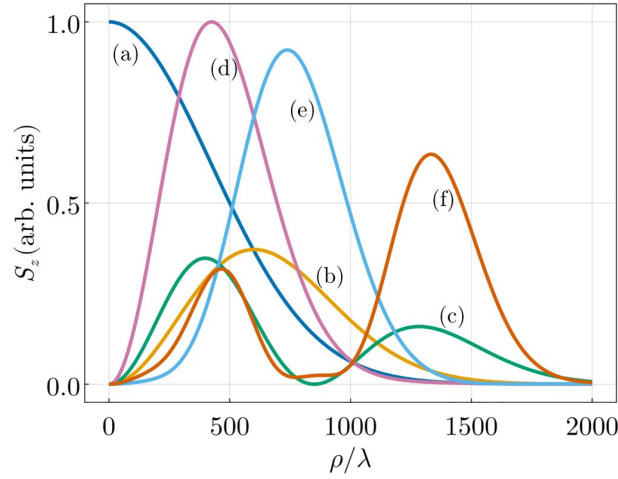


Figura 5.3: Componenta Oz a vectorului Poynting \mathbf{S} măsurat în planul $Z = 2 \times 10^5 \lambda$ (≈ 16 cm) pentru diferite valori ale lui N, p_L, m_L . (a) $N = 1, p_L = 0, m_L = 0$. (b) $N = 1, p_L = 0, m_L = 1$. (c) $N = 1, p_L = 1, m_L = 1$. (d) $N = 2, p_L = 0, m_L = 0$. (e) $N = 2, p_L = 0, m_L = 1$. (f) $N = 2, p_L = 1, m_L = 1$. Factorii de scalare s definiți în text sunt $s = 0.1$ a.u. ($N = 1$), respectiv $s = 1.7 \times 10^{-9}$ a.u. ($N = 2$). Publicat original în [72].

Pentru fiecare N , valorile lui S_z reprezentate în figura 5.3 au fost scalate cu factorul $s = \max(S_z)(p_L = m_L = 0)$ (maximul lui S_z pentru același N și $p_L = m_L = 0$); factorii de scalare sunt scriși în legendă. Putem observa diferențe foarte mari între valorile numerice ale armonice fundamentale și ale celei de-a doua (vezi valorile factorilor de scalare s în legenda figurii); acest fapt are două cauze: pe de o parte, câmpul electric depinde de „unghiul local de împrăștiere” θ_0 când $\mathbf{E}_n \sim \theta_0^{N-1}$ și, deoarece împrăștierea are loc în mare parte în direcția înainte, θ_0 va fi de ordinul a $\Theta_0 \approx 10^{-2}$. Pe de altă parte, câmpul emis E_N depinde și de parametrul adimensional a_0 când $E_N \sim a_0^N$, ceea ce introduce un factor suplimentar de 10^2 între $S_z(N = 1)$ și $S_z(N = 2)$.

Pe lângă simetria cilindrică, vectorul Poynting respectă și o lege de scalare în raport cu ρ și Z : produsul $Z^2 S_z(\rho, Z)$ depinde doar de raportul ρ/Z . Am verificat că pentru $Z \geq 10^5 \lambda$ relația

$$Z^2 S_z(\rho, Z) = \alpha^2 Z^2 S_z(\alpha\rho, \alpha Z) \quad (5.18)$$

este respectată cu o precizie foarte bună pentru valori arbitrare $\alpha \in (1, 10)$, ceea ce înseamnă că la o distanță mare de planul focal, forma distribuției energiei radiației emise se propagă nedistorsionată în interiorul unui con cu un unghi de deschidere dat.

În figura 5.4 prezentăm componenta Ox a câmpului electric emis pentru $p_L = m_L = 0$, $N = 1$ (a, d) și $N = 2$ (c, f) și pentru $p_L = m_L = 1$, $N = 1$ (b, e). În toate cazurile, distanța Z este $2 \times 10^5 \lambda$. Rândul superior arată partea reală a lui E_x , iar rândul inferior, faza sa. Pentru $N = 1$, câmpul emis este în esență identic cu cel incident: pentru $m_L = 0$ nu există dependență azimutală de câmpul electric, iar pentru $m = 1$, acesta are o structură elicoidală $E_x \sim e^{i\Phi}$. O structură azimutală similară a câmpului emis se

formează și pentru $m_L = 0$ $N = 2$ (b și e). De asemenea, este în bună concordanță cu rezultatul experimental prezentat de Hemsing și colab. [40]; în lucrarea lor, câmpul a fost obținut prin împrăștierea unui mod gaussian pe un fascicul de electroni modulat elicoidal, în timp ce în cazul nostru modulația este realizată chiar de câmpul incident.

Rezultatele sunt similare pentru cazul $N = 2$, $p_L = 2$, $m_L = \pm 2$ prezentat în figura 5.5 care arată partea reală a componentei E_x a câmpului electric (panourile (a) și (d)) și faza componentei E_x (panourile (b) și (e)), la aceeași distanță $Z = 2 \times 10^5 \lambda$. În graficele fazei lui E_x există două regiuni distincte: o regiune interioară de rază $\rho_1 \sim 400\lambda$ în care faza se schimbă lent cu ρ și regiunea exterioară în care faza se schimbă foarte rapid cu ρ , dând naștere unei figuri spiralate, în acord cu observația experimentală prezentată în [40].

În figura 5.5, panourile (c) și (f) conțin grafice ale fazei lui E_x în funcție de unghiul Φ în planul de observație pentru trei valori ale lui ρ , alese pentru a corespunde razelor inelelor concentrice în care este emisă radiația $\rho = 530\lambda$, 1150λ și 1910λ . În toate cazurile putem observa o concordanță foarte bună cu comportamentul prezis de ecuația (5.22); chiar și în regiunea exterioară, unde $\arg(E_x)$ se schimbă foarte rapid cu ρ , pentru ρ fix, faza depinde liniar de Φ , cu coeficientul

$$q = Nm_L + (N - 1)\epsilon_L = \begin{cases} -3, & m_L = -2 \\ 5, & m_L = 2 \end{cases} \quad (5.19)$$

De asemenea, am verificat că în toate cazurile $\arg(E_x) = \frac{\pi}{2} - \arg(E_y)$, deci radiația emisă este polarizată circular.

5.4 Aproximarea analitică a fazei

Continuând în cazul circular polarizat, câmpul total al modului N observat într-un punct \mathbf{x} , va avea forma

$$\mathcal{E}_N(\mathbf{x}) = \epsilon_L \frac{iqk_L N^N \sqrt{\pi}}{8\pi\epsilon_0 2^{3(N-1)/2} (N-1)!} \int \rho_0 d\rho_0 a^N(\rho_0) \mathfrak{J}_{\Phi_0}(\rho_0) \quad (5.20)$$

unde $\epsilon_L = (\mathbf{e}_x + i\epsilon_L \mathbf{e}_y)$, iar $\mathfrak{J}_{\Phi_0}(\rho_0)$ este integrala după azimutul în spațiul coordonatelor inițiale și are forma

$$\mathfrak{J}_{\Phi_0}(\rho_0) = \int d\Phi_0 \frac{e^{iNk_L(X_0 - Z_0)}}{X_0} e^{iNm_L\Phi_0} e^{i(N-1)\epsilon_L\phi_0} \theta_0^{N-1}. \quad (5.21)$$

Fiindcă integrandul nostru conține o exponențială complexă ce oscilează rapid în raport cu variabila de integrare, putem folosi metoda fazei staționare [73] pentru a aproxima valoarea lui $\mathfrak{J}_{\Phi_0}(\rho_0)$. Astfel, găsim punctele $\Phi_0^{(1)} = \phi$ și $\Phi_0^{(2)} = \phi + \pi$, iar integrala devine

$$\mathfrak{J}_{\Phi_0}(\rho_0) \approx e^{i(m_L N + \epsilon_L(N-1))\phi} h(\mathbf{x}; \rho_0), \quad (5.22)$$

iar $h(\mathbf{x}; \rho_0)$ este o funcție dată în teza in-extenso, în cadrul secțiunii 4.2.3.3.; faptul remarcabil este prefactorul

$$\exp(i(m_L N + \epsilon_L(N-1))\phi)$$

care prezice comportamentul fazei în raport cu azimutul punctului de observație, remarcat în panourile (c) și (f) ale figurii 5.5.

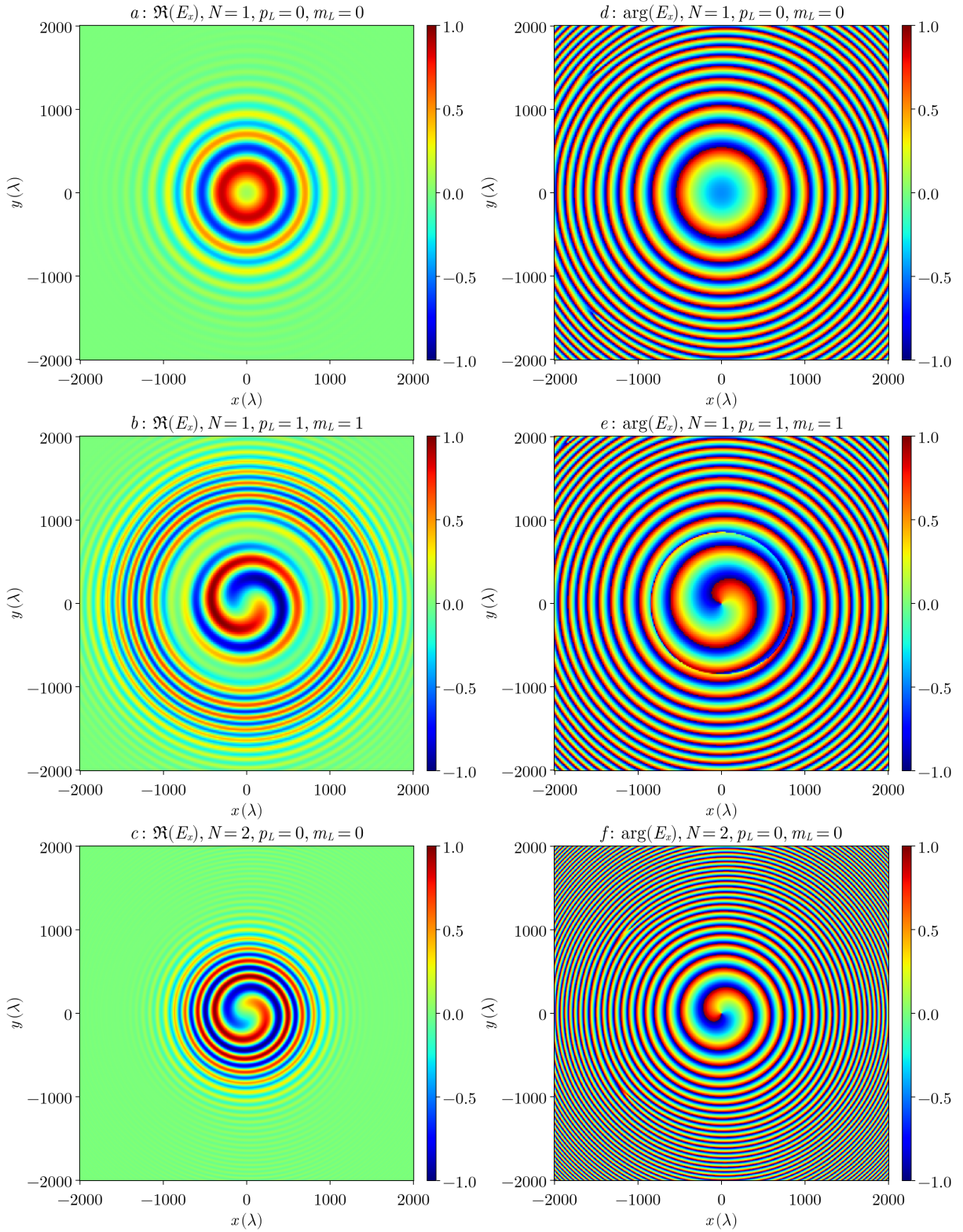


Figura 5.4: Coloana stângă: $\Re(E_x)$ a câmpului împrăștiat scalat în $(-1, 1)$; coloana dreaptă: faza lui E_x în unități de π ; toate măsurate pe un ecran amplasat la $Z = 2 \times 10^5 \lambda$. (a, d) $N = 1, p_L = m_L = 0, s = 0.052$ a.u., (b, e) $N = 1, p_L = m_L = 1, N = 1, p_L = m_L = 1, s = 0.039$ a.u., (c, f) $N = 2, m_L = p_L = 0, s = 8.9 \times 10^{-6}$ a.u.. Publicate original în [72].

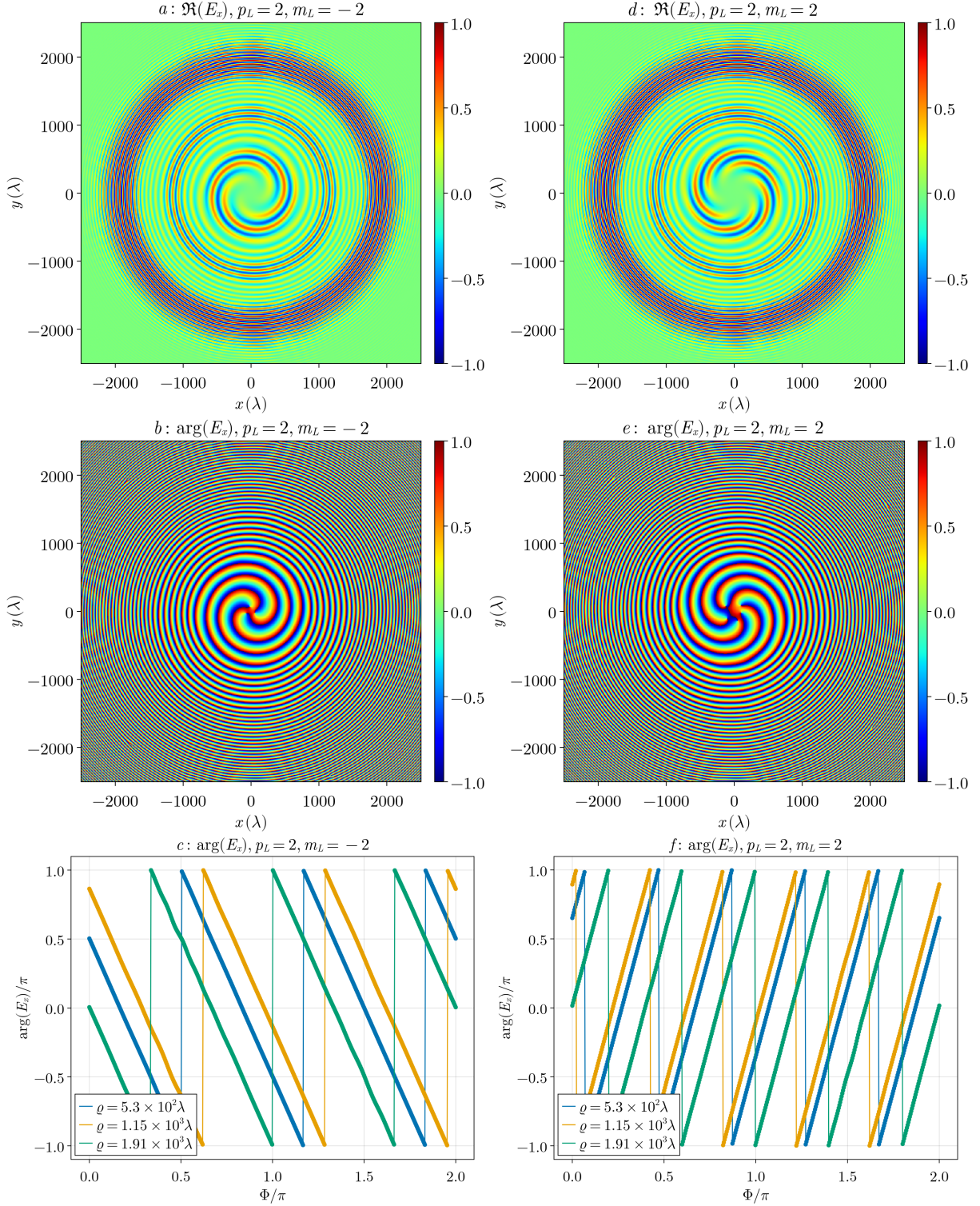


Figura 5.5: Câmpul împrăștiat pentru $Z = 2 \times 10^5 \lambda$, $N = 2$, $p_L = 2$ și două valori ale lui m_L . (a) Partea reală a lui E_x scalată la intervalul $(-1, 1)$, reprezentată în planul de observație pentru $m_L = -2$; $s = 1.0 \times 10^{-9}$ a.u.; (b) Faza lui E_x în unități de π , $\arg(E_x)/\pi$, reprezentată în planul de observație pentru $m_L = -2$; (c) faza lui E_x în unități de π , $\arg(E_x)/\pi$, în funcție de unghiul azimutal Φ în planul de observație pentru $m_L = -2$ și trei valori fixe ale lui ρ : $\rho_1 = 5.3 \times 10^2 \lambda$, $\rho_2 = 1.15 \times 10^3 \lambda$, $\rho_3 = 1.91 \times 10^3 \lambda$. (d) – (f) idem (a) – (c), dar pentru $m_L = 2$; factorul de scalare al lui (d) este același ca în (a). Publicate original în [72].

Concluzii

Această teză și-a propus să investigheze comportamentul particulelor cu sarcină sub acțiunea fasciculelor Laguerre-Gauss. Prima jumătate a tezei a avut ca scop investigarea transferului de moment cinetic de la fascicul către electroni. Unul dintre pilonii acestei teze a fost capacitatea de a integra rapid și cu o precizie ridicată ecuațiile analitice ale mișcării. Acest lucru a fost puternic înlesnit datorită numeroaselor contribuții la proiectele open source din ecosistemul Julia, iar cheia printre acestea este pachetul `DifferentialEquations.jl` care conține o multitudine de solver-e de ecuații diferențiale ordinare. Am realizat un test comparativ pe solver-ele disponibile, punând în balanță timpul de calcul, eroarea numerică indusă și utilizarea memoriei. Acest lucru a culminat în cele din urmă cu capacitatea de a simula 40.04 milioane de particule pe o singură mașină disponibilă în clusterul Universității din București, situat la Facultatea de Fizică.

Lucrările noastre inițiale au constatat în calcularea traiectoriei particulelor dispuse în planul transversal situat în focarul unui fascicul Laguerre-Gauss. Fasciculul în sine a fost înmulțit cu o anvelopă temporală, astfel încât am putut calcula o creștere (sau descreștere) a momentului cinetic înregistrat pentru fiecare particulă. Aceasta ne-a permis să observăm legile de scalare ale momentului cinetic transferat, liniare în regimul de intensitate scăzută și de tip putere în regimul de intensitate ridicată, depinzând în funcție de polarizarea fasciculului motor.

De asemenea, am ilustrat momentul cinetic câștigat în funcție de coordonatele inițiale. Astfel, am observat două stări staționare cu o distribuție geometrică bine definită, ce tranziționează continuu între ele.

Privind histogramele impulsului cinetic câștigat de particule, am putut constata că, exceptând fasciculelor Laguerre-Gauss polarizate circular de intensitate mare, niciun moment cinetic net nu este transferat de la fascicul către ansamblu. Aceasta nu înseamnă că particulele individuale nu pot câștiga cantități mari de impuls cinetic, dar, în general, distribuțiile nu trec testele de asimetrie, cu excepția cazului fasciculelor intense cu polarizare circulară. Există aici oportunitatea de a căuta modele dincolo de planul focal, în special prin utilizarea rezultatelor simulărilor la scară largă efectuate pe clusterul Universității.

Plecând de la observația că momentul cinetic final este „bine ordonat” în funcție de coordonatele inițiale, am reușit, de asemenea, să construiesc o aproximare analitică, estimând corect momentul cinetic câștigat, bazată pe presupunerea că pentru amplitudini mici ale câmpului incident, particula încărcată nu se deplasează semnificativ dincolo de o mică vecinătate în jurul coordonatelor sale inițiale, iar mișcarea sa va consta în oscilații de viteze foarte mici; prin urmare, aproximarea elimină totul cu excepția câmpului electric transversal.

Am testat aproximarea în regim liniar atât pentru momentul cinetic liniar, cât și pentru cel circular și am găsit o bună concordanță cu valorile obținute numeric prin integrarea ecuațiilor exacte de mișcare utilizând câmpurile exacte. O observație importantă cu pri-

vire la regimul liniar este că, așa cum am observat anterior în primele noastre lucrări, există o diferență puternică în ceea ce constituie regimul liniar, $a_0 = 10^{-8}$ pentru cazul polarizat liniar, față de $a_0 = 10^{-2}$ pentru cazul polarizat circular.

Comparând aproximațiile, am abordat și problema momentului liniar longitudinal și transversal în aproximarea forței ponderomotoare. Am reușit să validăm numeric legile de scalare obținute prin aproximare și am putut, de asemenea, să explicăm de ce, în acest cadru, niciun moment cinetic nu poate fi transferat de la fascicul la particule.

În a doua parte a tezei, trecem de la dinamica electronilor la radiația emisă de aceștia atunci când sunt acționați folosind fascicule Laguerre-Gauss. Pornind de la lucrarea de referință a lui Sarachick și Schappert din 1970, adaptăm soluția lor analitică pentru o particulă încărcată acționată de o undă plană la dinamica particulelor încărcate din fasciculul LG printr-o aproximare introdusă de noi, pe care am numit-o „aproximarea unei plane locale”. Am demonstrat numeric că, atunci când amplitudinea fasciculului incident este suficient de mică și talia sa este suficient de lată, soluțiile analitice de la unda plană pot fi reutilizate, prin simpla schimbare a parametrului de intensitate adimensional cu unul a cărui valoare este dată de amplitudinea locală a fasciculului LG.

Folosind această aproximare, extindem lucrarea lui Taira și colab. [41] și calculăm câmpul îndepărtat radiat pentru un singur electron. Apoi, modelăm o foaie subțire de electroni ca o distribuție uniformă a densității de sarcină superficială σ . Suntem astfel capabili să aproximăm analitic profilul de fază al câmpului îndepărtat radiat pentru un fascicul incident Laguerre-Gauss cu polarizare circulară. În aproximația noastră, radiația rezultată este, de asemenea, de natură elicoidală, iar sarcina sa topologică depinde de ordinea armonicii, de ordinul azimutal al fasciculului incident și de chiralitatea polarizării.

$$\mathbf{q} = Nm_L + (N - 1)\epsilon_L. \quad (6.1)$$

Acest rezultat analitic vine și ca o predicție teoretică a unui rezultat experimental anterior realizat de Hemsing și colab. [40]

În mod firesc, am testat formulele analitice rezultate pentru radiație și am constatat că aproximarea prezice foarte bine sarcina topologică (ordinul azimutal) a fasciculului rezultat. Integrarea numerică confirmă, de asemenea, faptul că câmpul îndepărtat radiat se deplasează pe un con cu deschidere îngustă; Vectorul Poynting, purtătorul energiei radiate, respectă în consecință următoarea lege de scalare

$$Z^2 S_z(\rho, Z) = \alpha^2 Z^2 S_z(\alpha\rho, \alpha Z) \quad (6.2)$$

unde Z este poziția ecranului.

Bibliografie

- [1] L. Allen, M. Beijersbergen, R. Spreeuw, and J. Woerdman, “Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes,” *Phys. Rev. A*, vol. 45, pp. 8185–8189, 1992.
- [2] A. M. Yao and M. J. Padgett, “Orbital angular momentum: origins, behavior and applications,” *Adv. Opt. Photon.*, vol. 3, no. 2, pp. 161–204, Jun 2011. [Online]. Available: <https://opg.optica.org/aop/abstract.cfm?URI=aop-3-2-161>
- [3] R. Chen, H. Zhou, M. Moretti, X. Wang, and J. Li, “Orbital angular momentum waves: Generation, detection, and emerging applications,” *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, vol. 22, no. 2, pp. 840–868, 2020.
- [4] M. Ma, Y. Lian, Y. Wang, and Z. Lu, “Generation, transmission and application of orbital angular momentum in optical fiber: A review,” *Frontiers in Physics*, vol. Volume 9 - 2021, 2021. [Online]. Available: <https://www.frontiersin.org/journals/physics/articles/10.3389/fphy.2021.773505>
- [5] W. Wang, X. Sun, F. Sun, Z. Lv, K. Glize, Z. Shi, Y. Xu, Z. Zhang, F. Wu, J. Hu, J. Qian, J. Zhu, X. Liang, Y. Leng, R. Li, and Z. Xu, “Enhanced proton acceleration via petawatt laguerre–gaussian lasers,” *Communications Physics*, vol. 8, no. 1, p. 281, Jul 2025. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1038/s42005-025-02205-y>
- [6] W. Wang, B. Shen, X. Zhang, L. Zhang, Y. Shi, and Z. Xu, “Hollow screw-like drill in plasma using an intense laguerre–gaussian laser,” *Scientific Reports*, vol. 5, no. 1, p. 8274, Feb 2015. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1038/srep08274>
- [7] A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, ser. Investigations in Physics. Princeton University Press, 1996.
- [8] M. Maggiore, *A modern introduction to quantum field theory*, ser. Oxford master series in physics 12. Oxford University Press, 2005.
- [9] J. L. S. Herbert Goldstein, Charles P. Poole, *Classical mechanics*, 3rd ed. Addison Wesley, 2001.
- [10] C. D. Murray and S. F. Dermott, *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press, 2000.
- [11] S. M. Barnett, “Rotation of electromagnetic fields and the nature of optical angular momentum,” *Journal of Modern Optics*, vol. 57, no. 14-15, pp. 1339–1343, 2010, PMID: 24808629. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1080/09500341003654427>

- [12] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg, *Photons and Atoms: Introduction to Quantum Electrodynamics*. John Wiley & Sons, Ltd, 1997. [Online]. Available: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9783527618422>
- [13] R. P. Cameron and S. M. Barnett, “Electric–magnetic symmetry and noether’s theorem,” *New Journal of Physics*, vol. 14, no. 12, p. 123019, dec 2012. [Online]. Available: <https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/14/12/123019>
- [14] G. Vallone, “On the properties of circular beams: normalization, laguerre–gauss expansion, and free-space divergence,” *Opt. Lett.*, vol. 40, no. 8, pp. 1717–1720, Apr 2015. [Online]. Available: <https://opg.optica.org/ol/abstract.cfm?URI=ol-40-8-1717>
- [15] E. Leader, “The photon angular momentum controversy: Resolution of a conflict between laser optics and particle physics,” *Phys. Lett. B*, vol. 756, pp. 303–308, 2016.
- [16] Z. Léczy, A. Andreev, and A. Seryi, “Plasma rotation with circularly polarized laser pulse,” *Laser and Particle Beams*, vol. 34, no. 1, p. 31–42, 2016.
- [17] L.-X. Hu, T.-P. Yu, Y. Lu, G.-B. Zhang, D.-B. Zou, H. Zhang, Z.-Y. Ge, Y. Yin, and F.-Q. Shao, “Dynamics of the interaction of relativistic laguerre–gaussian laser pulses with a wire target,” *Plasma Physics and Controlled Fusion*, vol. 61, no. 2, p. 025009, dec 2018. [Online]. Available: <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6587/aaefb6>
- [18] A. Longman and R. Fedosejevs, “Kilo-tesla axial magnetic field generation with high intensity spin and orbital angular momentum beams,” *Phys. Rev. Res.*, vol. 3, p. 043180, Dec 2021. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.3.043180>
- [19] R. Nuter, P. Korneev, I. Thiele, and V. Tikhonchuk, “Plasma solenoid driven by a laser beam carrying an orbital angular momentum,” *Phys. Rev. E*, vol. 98, p. 033211, Sep 2018. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.98.033211>
- [20] C. Baumann and A. Pukhov, “Electron dynamics in twisted light modes of relativistic intensity,” *Physics of Plasmas*, vol. 25, no. 8, p. 083114, 08 2018. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/1.5044617>
- [21] R. Nuter, P. Korneev, E. Dmitriev, I. Thiele, and V. T. Tikhonchuk, “Gain of electron orbital angular momentum in a direct laser acceleration process,” *Phys. Rev. E*, vol. 101, p. 053202, May 2020. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.101.053202>
- [22] E. Dmitriev and P. Korneev, “Angular momentum gain by electrons under the action of intense structured light,” *Phys. Rev. A*, vol. 110, p. 013514, Jul 2024. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.110.013514>
- [23] C. Birdsall and A. Langdon, *Plasma Physics via Computer Simulation*, 1st ed. CRC Press, 1991.
- [24] M. Dondera, “Electrons in twisted fields and ponderomotive effects,” *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, 2020. [Online]. Available: <http://iopscience.iop.org/10.1088/1361-6455/ab678e>

- [25] E. Molnár and D. Stutman, “Direct laser-driven electron acceleration and energy gain in helical beams,” *Laser and Particle Beams*, vol. 2021, p. e11, 2021.
- [26] E. O. Dmitriev and P. A. Korneev, “On the effect of approximations on the conservation of integrals of motion in laguerre–gaussian beams,” *Bulletin of the Lebedev Physics Institute*, vol. 49, no. 2, pp. 48–54, Feb 2022. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3103/S1068335622020038>
- [27] —, “Laser pulse interaction with plasma under conditions of broken axial symmetry,” *Bulletin of the Lebedev Physics Institute*, vol. 50, no. 8, pp. S891–S898, Oct 2023. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3103/S1068335623200046>
- [28] P.-V. Toma, S. Micluța-Câmpeanu, M. Boca, A. Nicolin, and V. Băran, “Scaling properties of angular momentum transfer to charged particles under laguerre-gauss laser pulse,” *AIP Conference Proceedings*, vol. 2843, no. 1, p. 020005, 07 2023. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/5.0150590>
- [29] G. T. Sarachik, E. S.; Schappert, “Classical theory of the scattering of intense laser radiation by free electrons,” *Physical Review D*, vol. 1, 5 1970.
- [30] G. A. Krafft, “Spectral distributions of thomson-scattered photons from high-intensity pulsed lasers,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 92, p. 204802, May 2004. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.92.204802>
- [31] S. K. Ride, E. Esarey, and M. Baine, “Thomson scattering of intense lasers from electron beams at arbitrary interaction angles,” *Phys. Rev. E*, vol. 52, pp. 5425–5442, Nov 1995. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.52.5425>
- [32] Y. Salamin and F. Faisal, “Harmonic generation by superintense light scattering from relativistic electrons,” *Phys. Rev. A*, vol. 54, pp. 4383–4395, 12 1996.
- [33] Y. I. Salamin and F. H. M. Faisal, “Harmonic generation by scattering circularly polarized light of arbitrary intensity from free electrons of arbitrary initial velocity,” *Phys. Rev. A*, vol. 55, pp. 3964–3967, May 1997. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.55.3964>
- [34] G. A. Krafft, “Spectral distributions of thomson-scattered photons from high-intensity pulsed lasers,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 92, p. 204802, May 2004. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.92.204802>
- [35] G. A. Krafft, A. Doyuran, and J. B. Rosenzweig, “Pulsed-laser nonlinear thomson scattering for general scattering geometries,” *Phys. Rev. E*, vol. 72, p. 056502, Nov 2005. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.72.056502>
- [36] M. Katoh, M. Fujimoto, H. Kawaguchi, K. Tsuchiya, K. Ohmi, T. Kaneyasu, Y. Taira, M. Hosaka, A. Mochihashi, and Y. Takashima, “Angular momentum of twisted radiation from an electron in spiral motion,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 118, p. 094801, Feb 2017. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.094801>
- [37] V. Bordovitsyn, O. Konstantinova, and E. Nemchenko, “Angular momentum of synchrotron radiation,” *Russ Phys J*, vol. 55, pp. 44–52, 2012. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s11182-012-9774-9>

- [38] V. Epp and U. Guselnikova, “Angular momentum of radiation from a charge in circular and spiral motion,” *Physics Letters A*, vol. 383, no. 22, pp. 2668–2671, 2019. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960119304633>
- [39] V. Epp, U. Guselnikova, and I. Kamenskaya, “Angular momentum transferred by the field of a moving point charge,” *Phys. Rev. A*, vol. 105, p. 023511, Feb 2022. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.105.023511>
- [40] E. Hemsing, A. Knyazik, M. Dunning, D. Xiang, A. Marinelli, C. Hast, and J. B. Rosenzweig, “Coherent optical vortices from relativistic electron beams,” *Nature Physics*, vol. 9, no. 9, pp. 549–553, Sep 2013. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1038/nphys2712>
- [41] T. Taira, Yoshitaka and Hayakawa and M. Katoh, “Gamma-ray vortices from nonlinear inverse thomson scattering of circularly polarized light,” *Scientific Reports*, vol. 7, p. 5018, 2017. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1038/s41598-017-05187-2>
- [42] O. Vais and V. Bychenkov, “Nonlinear thomson scattering of a tightly focused relativistically intense laser pulse by an ensemble of particles,” *Quantum Electronics*, vol. 50, no. 10, p. 922, oct 2020. [Online]. Available: <https://dx.doi.org/10.1070/QEL17344>
- [43] I. Pastor, R. F. Álvarez Estrada, L. Roso, F. Castejón, and J. Guasp, “Nonlinear relativistic electron thomson scattering for laser radiation with orbital angular momentum,” *Journal of Physics Communications*, vol. 4, no. 6, p. 065010, jun 2020. [Online]. Available: <https://dx.doi.org/10.1088/2399-6528/ab9afa>
- [44] M. Mokrov, M. Shneider, and A. Gerakis, “Analysis of coherent thomson scattering from a low temperature plasma,” *Physics of Plasmas*, vol. 29, p. 033507, 03 2022.
- [45] X. Zhang, B. Shen, Y. Shi, X. Wang, L. Zhang, W. Wang, J. Xu, L. Yi, and Z. Xu, “Generation of intense high-order vortex harmonics,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 114, p. 173901, Apr 2015. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.173901>
- [46] Z.-W. Lu, L. Guo, Z.-Z. Li, M. Ababekri, F.-Q. Chen, C. Fu, C. Lv, R. Xu, X. Kong, Y.-F. Niu, and J.-X. Li, “Manipulation of giant multipole resonances via vortex γ photons,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 131, p. 202502, Nov 2023. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.131.202502>
- [47] Y. Xu, D. L. Balabanski, V. Baran, C. Iorga, and C. Matei, “Vortex photon induced nuclear reaction: Mechanism, model, and application to the studies of giant resonance and astrophysical reaction rate,” *Physics Letters B*, vol. 852, p. 138622, 2024. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269324001801>
- [48] V. Chvykov, “High-power lasers,” *Encyclopedia*, vol. 4, no. 3, pp. 1236–1249, 2024. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/2673-8392/4/3/80>
- [49] J. Zhu, “Review of special issue on high power facility and technical development at the nlhplp,” *High Power Laser Science and Engineering*, vol. 7, p. e12, 2019.

- [50] C. N. Danson, C. Haefner, J. Bromage, T. Butcher, J.-C. F. Chanteloup, E. A. Chowdhury, A. Galvanauskas, L. A. Gizzi, J. Hein, D. I. Hillier, and et al., “Petawatt and exawatt class lasers worldwide,” *High Power Laser Science and Engineering*, vol. 7, p. e54, 2019.
- [51] M. Aléonard, M. Altarelli, P. Antici, A. Apolonskiy, P. Audebert, A. Bartnik, C. Barty, A. Bernstein, J. Biegert, P. Böni, N. Booth, D. Bote, S. Bulanov, R. Butkus, L. Cardoso, J. Chambaret, D. Charambilidis, G. Cheriaux, R. Clarke, and M. Zepf, *WHITEBOOK ELI – Extreme Light Infrastructure; Science and Technology with Ultra-Intense Lasers*. THOSS Media GmbH, 01 2011.
- [52] “Frontiers Research in Photon-Matter Interaction Using Extreme Helical Light Beams project webpage,” <http://proiecte.nipne.ro/pn3/11-projects.html>, accessed: 2025-08-30.
- [53] A.-M. Talposi, V. Iancu, and D. Ursescu, “Influence of spatio-temporal couplings on focused optical vortices,” *Photonics*, vol. 9, no. 6, 2022. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/2304-6732/9/6/389>
- [54] A. Crăciun and T. Dascălu, “A method to generate vector beams with adjustable amplitude in the focal plane,” *Applied Sciences*, vol. 10, no. 7, 2020. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/2076-3417/10/7/2313>
- [55] V. Iancu, M. Talposi, S. Popa, P. Ghenuche, M. Cernaianu, D. Doria, G. Cojocaru, I. Dancus, R. Ungureanu, O. Chalus, and D. Ursescu, “Qualification and optimization of helical phase pulses in pw-class laser systems,” in *Imaging and Applied Optics Congress 2022 (3D, AOA, COSI, ISA, pcAOP)*. Optica Publishing Group, 2022, p. OTh4B.2. [Online]. Available: <https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=AOA-2022-OTh4B.2>
- [56] O.-V. Grigore and A. Craciun, “Method for exploring the topological charge and shape of an optical vortex generated by a spiral phase plate,” *Optics & Laser Technology*, vol. 141, p. 107098, 2021. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030399221001869>
- [57] A. Craciun and O.-V. Grigore, “Superposition of vortex beams generated by polarization conversion in uniaxial crystals,” *Scientific Reports*, vol. 12, no. 1, p. 8135, May 2022. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1038/s41598-022-12223-3>
- [58] Y. Xu, D. L. Balabanski, V. Baran, C. Iorga, and C. Matei, “Vortex photon induced nuclear reaction: Mechanism, model, and application to the studies of giant resonance and astrophysical reaction rate,” *Physics Letters B*, vol. 852, p. 138622, 2024. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269324001801>
- [59] B.-S. Călin, C. Dobrea, I. Tiseanu, and M. Zamfirescu, “Laser microfabrication of conical microtargets for laser driven particle acceleration,” *Journal of Laser Applications*, vol. 33, no. 1, p. 012054, 02 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.2351/7.0000039>
- [60] P.-V. Toma, S. Micluța-Câmpeanu, M. Boca, and V. Băran, “Angular momentum transfer to charged particles by interaction with laguerre-gauss

- pulses,” *AIP Advances*, vol. 14, no. 6, p. 065109, 06 2024. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1063/5.0205865>
- [61] M. Boca, “Generalization of space-translation method for atom laser interaction in relativistic regime,” Ph.D. dissertation, UB, 2007.
- [62] J. Bezanson, A. Edelman, S. Karpinski, and V. B. Shah, “Julia: A fresh approach to numerical computing,” *SIAM Review*, vol. 59, no. 1, pp. 65–98, 2017.
- [63] “The Julia Programming Language official webpage language description,” <https://julialang.org/>, accessed: 2025-08-30.
- [64] C. Rackauckas and Q. Nie, “DifferentialEquations.jl—a performant and feature-rich ecosystem for solving differential equations in julia,” *Journal of Open Research Software*, vol. 5, no. 1, 2017.
- [65] “DifferentialEquations.jl official package documentation,” https://docs.sciml.ai/DiffEqDocs/stable/tutorials/faster_ode_example/\#Further-Optimizations-of-Small-Non-Stiff-ODEs-with-StaticArrays, accessed: 2025-08-30.
- [66] J. H. Verner, “Numerically optimal runge–kutta pairs with interpolants,” *Numerical Algorithms*, vol. 53, no. 2-3, p. 383–396, 2010.
- [67] B. Owren and M. Zennaro, “Derivation of efficient, continuous, explicit runge–kutta methods,” *SIAM journal on scientific and statistical computing*, vol. 13, no. 6, p. 1488–1501, 1992.
- [68] J. R. Dormand and P. J. Prince, “A family of embedded runge-kutta formulae,” *Journal of computational and applied mathematics*, vol. 6, no. 1, p. 19–26, 1980.
- [69] S. P. N. Ernst Hairer, Gerhard Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I*. Springer Berlin Heidelberg, 1993. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-78862-1>
- [70] C. Tsitouras, “Runge–kutta pairs of order 5 (4) satisfying only the first column simplifying assumption,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 62, no. 2, p. 770–775, 2011.
- [71] C. Rackauckas and Q. Nie, “SciMLBenchmarks.jl julia package,” v0.1.3. [Online]. Available: <https://github.com/SciML/SciMLBenchmarks.jl>
- [72] P.-V. Toma, A. C. Opincea, V. Baran, and M. Boca, “Coherent nonlinear thomson scattering of laguerre-gauss beams on an electron sheet,” *Phys. Rev. A*, vol. 111, p. 013101, Jan 2025. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.111.013101>
- [73] J. McClure and R. Wong, “Multidimensional stationary phase approximation: boundary stationary point,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 30, no. 2, pp. 213–225, 1990. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037704279090029Y>
- [74] P.-V. Toma, S. Micluța-Câmpeanu, M. Boca, A. Nicolin, and V. Băran, “Angular momentum transfer to charged particles under laguerre-gauss pulses,” November 2021, oral presentation at the TIM 20-21 Conference, Online.

- [75] P.-V. Toma, V. Băran, S. Micluta-Campeanu, and M. Boca, “Angular momentum transfer to charged particles under laguerre-gauss pulses,” July 2023, oral presentation at the LPhys '23 Conference, Online.

Publicații Științifice și Conferințe

8.1 Lucrări publicate în reviste

8.1.1 Reviste cotate ISI

1. **Petru-Vlad Toma**, Sebastian Micluța-Câmpeanu, Mădălina Boca, Virgil Băran; *Angular momentum transfer to charged particles by interaction with Laguerre–Gauss pulses*. AIP Advances 1 June 2024; **14** (6): 065109. <https://doi.org/10.1063/5.0205865> (AIS = 0.302, IF = 1.4)
2. **Petru-Vlad Toma**, Andrei Cristian Opincă, Virgil Băran, Mădălina Boca; *Coherent nonlinear Thomson scattering of Laguerre-Gauss beams on an electron sheet*. Phys. Rev. A **111**, 013101, Jan 2025. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.111.013101> (AIS = 0.742, IF = 2.9)

8.1.2 Reviste non-ISI

1. **Petru-Vlad Toma**, Sebastian Micluța-Câmpeanu, Mădălina Boca, Alexandru Nicolin, Virgil Băran; *Scaling properties of angular momentum transfer to charged particles under Laguerre-Gauss laser pulse*. AIP Conf. Proc. 24 July **2023**; 2843 (1): 020005. <https://doi.org/10.1063/5.0150590>
2. **Petru-Vlad Toma**, Virgil Băran, Sebastian Micluța-Câmpeanu, Mădălina Boca, *Linear and Angular Momentum of Classical Particles Interacting with a Laguerre-Gauss Laser Pulse* J. Phys.: Conf. Ser. **2894** 012006, nov. 2024. <https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/2894/1/012006>

8.2 Lucrări prezentate la conferințe

8.2.1 Conferințe internaționale

1. Prezentare orală, *Angular Momentum Transfer to Charged Particles Under Laguerre-Gauss Pulses*, **Petru-Vlad Toma**, Sebastian Micluța-Câmpeanu, Mădălina Boca, Alexandru Nicolin and Virgil Băran, la *TIM 20-21* international physics conference, (Online/Timișoara, Romania), 11-13 November 2021 [74].
2. Prezentare orală, *Linear and Angular Momentum of Classical Particles Interacting with a Laguerre-Gauss Laser Pulse*, **Petru-Vlad Toma**, Virgil Băran, Sebastian Micluța-Câmpeanu, Mădălina Boca, la *The thirty-first annual International Laser Physics Workshop (LPHYS'23)*, (Online), 3-7 July 2023 [75]